KAIST 전산학과 최광무

(정의 6.1) 비결정적(Nondeterministic) Pushdown Automata(PDA) P는 요소 일곱 개로 이루어져있다. 즉 $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$로 쓰고

(1) 상태어휘 Q은 **상태**(state)의 **유한** 집합(state vocabulary)이다.
(2) 입력어휘 Σ은 **입력문자**의 **유한** 집합(input vocabulary)이다.
(3) 스택어휘 Γ은 **스택문자**의 **유한** 집합(stack vocabulary)이다.
(4) δ는 **상태변화함수**(state transition function)로서 상태집합 Q와 입력문자(Σ) 혹은 빈 문자열(ϵ), 스택문자(Γ)를 정의역으로, 상태 Q와 스택문자열의 집합[1]을 함수의 치역으로 가진다. 즉

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$$로 정의하고,

$(p, \beta) \in \delta(q, a, X)$이면, **현 상태** $q \in Q$에서 **입력문자** a[2]$\in \Sigma \cup \{\epsilon\}$와, **스택 top 문자** $X \in \Gamma$를 보고, **상태**가 $p \in Q$로 바뀌고, 스택 top 문자 X를 pop한 다음에 스택문자열 $\beta \in \Gamma^*$를 push하여[3] 스택 top이 β로 바뀐다.

(5) $q_0 \in Q$는 **처음상태**(initial state)라고 불리는 특별한(distinguished) 상태이다.
(6) $Z_0 \in \Gamma$는 **처음스택내용**(initial stack contents)이라고 불리는 특별한(distinguished) 스택문자이다.
(7) $F \subseteq Q$는 **끝나는 상태**(final state)라고 불리는 특별한 상태들의 집합이다.

(정의 6.2) PDA $P = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, \gamma_0, F)$에서 **상황**(instantaneous description, **configuration**)을 (상태, 입력문자열, 스택문자열)의 세 순서쌍[4]으로 정의한다.

$$(q, x, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*.$$

(정의 6.3) PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \gamma_0, F)$에서 상태변화함수 δ에 따른 **상황변화** $\vdash_P$를 상황에 관한 이진관계[5]로 정의한다. $\vdash_P \subseteq (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$.

$(q, ax, X\gamma) \vdash_P (p, x, \beta\gamma)$, if $(p, \beta) \in \delta(q, a, X)$.

$(q, x, X\gamma) \vdash_P (p, x, \beta\gamma)$, if $(p, \beta) \in \delta(q, \epsilon, X)$.

PDA P가 명백하면, $\vdash_P$에서 P를 생략하고 $\vdash$로 쓴다.

(정의 6.4) 상황변화 $\vdash$의 반복횟수(recursive definition) $\vdash^n$, $n \geq 0$.

$$\vdash^0 \overset{\text{def}}{=}_{\text{B}} id_{Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*}.$$

$$\vdash^n \overset{\text{def}}{=}_{\text{R}} \vdash \circ \vdash^{n-1}.$$

(정의 6.5) 상황변화 $\vdash$의 반복합(closure) $\vdash^\dagger$와 $\vdash^*$.

---

1) 상태와 스택문자열의 집합을 치역으로 허용하고 ϵ-move도 허용하므로 nondeterministic하다.
2) ϵ-NFA와 같이 입력 문자 a가 Σ의 원소이면 다음 입력문자가 a의 오른쪽 문자가 되고, a가 ϵ이면 다음 입력문자가 변하지 않는다.
3) 스택 문자열 $\beta = X_1 X_2 \cdots X_n$일 때, 오른쪽 끝 문자 X_n부터 차례로 거꾸로 push하여 β의 가장 왼쪽 문자 X_1이 스택 top에 들어난다.
4) ordered triple
5) Binary relation on $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$(상황).

$$\vdash^{\dagger} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in N_1} \vdash^i = \vdash^1 \cup \vdash^2 \cup \vdash^3 \cup \cdots$$

$$\vdash^{*} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in N_0} \vdash^i = \vdash^0 \cup \vdash^1 \cup \vdash^2 \cup \cdots$$

(정의 6.6) PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, \gamma_0, F)$가 정의하는 언어, $L(P)$.

$L(P) = \{x \in \Sigma^* | (q_0, x, Z_0) \vdash_P^* (f, \epsilon, \gamma),\ f \in F\}$ Final state accept

$N(P) = \{x \in \Sigma^* | (q_0, x, Z_0) \vdash_P^* (q, \epsilon, \epsilon),\ q \in Q\}.$ Null stack accept

Final state accept와 Null stack accept를 모두 수용하기 위하여, (5) 처음상태 $q_0 \in Q$와 (6) 처음스택내용 $\gamma_0 \in \Gamma^*$를 처음상황 $\iota = (q_0, x, \gamma_0) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$으로 바꾸고, (7) 끝나는 상태 $F \subseteq Q$을 끝나는 상황집합 $\Phi \subseteq Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$로 다시정의하면, Final state acceptance는 $\Phi_F = \{(f, \epsilon, \alpha) | \alpha \in \Gamma^*\}$로 정의하고, Null stack acceptance는 $\Phi_N = \{(q, \epsilon, \epsilon) | q \in Q\}$로 처리하면 되므로, 7-tuple PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, \gamma_0, F)$를 6-tuple $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \Phi)$로 다시 정의할 수 있다.

(정의 6.7) **변화된** PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \Phi)$에서

(1) 상태어휘 Q, (2) 입력어휘 Σ, (3) 스택어휘 Γ, (4) 상태변화함수 δ는 원래 PDA와 같고,

(5) **처음상황**(initial confinguration) $\iota \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$,

(6) **끝나는 상황 집합**(set of final configurations) $\Phi \subseteq Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$이다.

(정의 6.8) PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \Phi)$가 받아들이는 언어(language)는

$L(P) = \{x \in \Sigma^* | \iota \vdash_P^* \phi,\ \phi \in \Phi\}$이다.

7-tuple PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, \gamma_0, F)$를 6-tuple PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \Phi)$로 다시 정의하며 초기상황 $\iota = (q_0, x, \gamma_0)$ 마지막상황 집합 $\Phi_{Final\ state} = \{(f, \epsilon, \alpha) | f \in F,\ \alpha \in \Gamma^*\}$와 $\Phi_{Null\ stack} = \{(q, \epsilon, \epsilon) | q \in Q\}$ 두 가지를 생각하면 두 개의 6-tuple PDA $P_{Final\ state} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \Phi_{Final\ state})$와 $P_{Null\,stack} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \Phi_{Nulll\ stack})$을 정의할 수 있고,

$L(P) = L(P_{Final\ state})$와 $N(P) = L(P_{Null\ stack})$로 통합된다.

(정의 6.10) **확장된** PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \iota, \Phi)$

(1) 상태어휘 Q, (2) 입력어휘 Σ, (3) 스택어휘 Γ은 원래(변화된) PDA와 같고,

(4) **상황변화규칙** $\Delta \subseteq (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$으로 확장한다.

상황변화함수(configuration transition function) δ 대신에 상황변화규칙 Δ를 써서, 상황(Q, Σ^*, Γ^*)에 관한 이진관계(binary relation)로 본다.

i) 읽는 스택문자를 하나(Γ)에서 0개 이상(Γ^*)으로 확장한다.

ii) 입력문자(Σ)나 ϵ을 입력문자열(Σ^*)로 **확장**하지만, 입력 테이프는 읽을 수 만 있으므로(read only) $(q, xy, \alpha) \rightarrow (p, y, \beta)$인 형태만 허용한다.

iii) 읽고 쓰는 스택 문자(Γ)는 스택 문자열(Γ^*)로 확장한다.
상황변화규칙 $(q, xy, \alpha) \rightarrow (p, y, \beta)$를 7-tuple PDA에서는 상황변화함수 $(p, y, \beta) \in \delta(q, xy, \alpha)$로 쓸 수 있다.

(5) 처음상황 ι과 (6)마지막상황 집합 Φ도 변화된 PDA와 같다.

(사실) 제한된 PDA로 확장된 PDA를 흉내 낼 수 있다.

확장된 PDA를 다시쓰기(Rewriting) PDA를 다시 정의한다.

(정의 **6.11**) 다시쓰기 PDA $R = (Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*, \Delta, \iota, \Phi)$은

(1) 상태어휘 Q, 입력어휘 Σ, 스택어휘 Γ은 원래 PDA와 같고,
$Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*$은 **상황**(configuration)의 집합이다.

(2) $\Delta \subseteq (Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*) \times (Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*)$는 **상황변화규칙**으로
$(q, xy, \alpha) \rightarrow (p, y, \beta) \in P$로 **쓰고**[6],
임의의 입력 문자열 $z\in\Sigma^*$와 스택 문자열 $\gamma\in\Gamma^*$에 대하여 $\rightarrow$를 $\Rightarrow$로 **다시쓰기**(**rewriting**)로 **확장하여** $(q, xy, \alpha) \rightarrow (p, y, \beta)$이면, $(q, xyz, \alpha\gamma) \Rightarrow (p, yz, \beta\gamma)$로 **다시 쓰고**(**rewrite**), 상황변화규칙 $(q, xy, \alpha) \rightarrow (p, y, \beta)$를 강조하고 싶으면
$(q, xyz, \alpha\gamma) \Rightarrow^{(q,xy,\alpha)\rightarrow(p,y,\beta)} (p, yz, \beta\gamma)$로 **쓴다.**

(3) $\iota \in Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*$는 **초기상황**이다.

(4) $\Phi \subseteq Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*$는 **최종상황**의 집합이다.

(정의 **6.12**) 다시쓰기 PDA $R = (Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*, \Delta, \iota, \Phi)$의 **언어**(language)는
$L(R) = \{x\in\Sigma^* \mid \iota \Rightarrow^{\delta} \phi\in\Phi,\ \delta\in\Delta^*\}$이고, $\delta \in \Delta^*$는 사용된 **규칙열**이다.

6) 문법과 같은 기술임에 유의하라.