KAIST 전산학과 최광무

(정의) 논리식(Boolean Expression)

$e \rightarrow e \vee e \mid e \wedge e \mid \neg e \mid (e) \mid v \mid T \mid F$

논리식은 $\{T, F\}$를 값으로 하고 변수와 식을 만드는 연산자 $\vee$, $\wedge$, $\neg$를 허용하는 식이다.

n개의 변수로 이루어진 논리식을 $B(v_1, v_2, \cdots, v_n)$이라고 하자. n개의 변수 $v_1, v_2, \cdots, v_n$에 $\{T, F\}$값을 배정하는 것을 assignment(2^n개)라고 부르고, 이 중 논리식을 $B(v_1, v_2, \cdots, v_n)$의 값을 T로 하는assignment를 truth assignment라고 부른다.

(정의) n 변수 논리식 $B(v_1, v_2, \cdots, v_n)$의 truth assignment가 존재하면 논리식 $B(v_1, v_2, \cdots, v_n)$은 만족한다(satiafiable)고 말한다.

(정의) 임의의 Bool식 $B(v_1, v_2, \cdots, v_n)$이 satisfiable한가 안한가의 문제를 satisfiability(SAT) 문제라고 부른다.

(정리) SAT는 **최초**의 NP-complete 문제이다.(Cook's Theorem)

(1) $SAT \in$ **NP**.

(2) $\forall P \in$ **NP**, $P' \leq_P SAT$.

(사실) $SAT \leq_P P$이면 P도 NP-complete이다.

(증명) (1) $SAT \in$ **NP**.

n 변수 이므로 2^n개의 서로 다른 assignment가 있다. 하나의 assignment가 Bool식 $B(v_1, v_2, \cdots, v_n)$을 T로 하는가 F로 하는가를 확인하는데는 polynomial 시간이면 충분하다. Polynomial 알고리즘을 2^n개를 nondeterministc하게 동시에 돌리는 것이 SAT를 위한 알고리즘이다.

$\therefore$ $SAT \in$ **NP**이다.

(2) $\forall P \in$ **NP**, $P \leq_P SAT$.

임의의 $P \in$ **NP**이므로 Nondeterministic TM(NTM)에서 $p(n)$번에 움직임이 있고 하자.

(a) $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow^* \cdots \Rightarrow \alpha_{p(n)}$. $1 \leq \forall i \leq p(n)$: $\alpha_i \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^* \ \wedge\ |\alpha_i| \leq p(n)$.

$1 \leq \forall i, \forall j \leq p(n)$: $\alpha_i = X_{i,1} X_{i,2} \cdots X_{i,p(n)}$. $X_{ij} \in Q \cup \Gamma$.

$(p(n))^2$ cells $O(p(n))$ cells

(b) $y_{ijA} \stackrel{\text{def}}{=} X_{ij} = A$.

$(p(n))^2 \cdot (|Q| + |\Gamma|)$ 변수 $O(p(n))$ 변수

(c) 임의의 P를 위한 다항식 시간 TM M은 입력 문자열 $w \in \Sigma^*$에 관하여

$E_{M,w}$ = 규칙을 지키며 $\wedge$ 잘 시작해서 $\wedge$ 잘 한 후에 $\wedge$ 올바르게 끝낸다.

4개의 논리식의 $\wedge$로 표시된다.

(1) 규칙을 지키며(U: Unique): 한 셀에는 하나의 심벌만 있어야한다.

$U = \wedge_{1 \le \forall i \le p(n)} \wedge_{1 \le \forall j \le p(n)} \wedge_{\forall A \ne B \in Q \cup \Gamma} \neg(y_{ijA} \wedge y_{ijB})$

$(p(n))^2 \cdot (|Q|+|\Gamma|)^2$개의 $\wedge$식 $O(p(n))$ 식

(2) 잘 시작해서(S: Start)

$w = a_1 \cdots a_n$이라면

$S = y_{1,1,q_0} \wedge y_{1,2,a_1} \wedge y_{1,3,a_2} \wedge \cdots \wedge y_{1,n+1,a_n} \wedge y_{1,n+2,B} \wedge \cdots \wedge y_{1,p(n),B}$.

$p(n)$개 변수의 $\wedge$. $O(p(n))$ 식

(3) 잘 한 후에(N: Next)

$N = \wedge_{1 \le \forall i < p(n)} \wedge_{1 \le \forall j < p(n)} (A_{i,j} \vee B_{i,j})$.

$(p(n)-1)^2$개의 $\wedge$식 $O(p(n))$ 식

(A) $X_{i,j}$가 상태이면, 세 개의 cell이 창(window)이다.

$X_{i,j-1}X_{i,j}X_{i,j+1} = DqA$라고 하자, 단 $q \in Q$, $D, A \in Q$.

(1) $\delta(q, A) = (p, C, R)$이면 $\cdots DqA \cdots \Rightarrow \cdots DCp \cdots$

$A_{i,j} = y_{i,j-1,D} \wedge y_{i,j,q} \wedge y_{i,j+1,A} \wedge y_{i+1,j-1,D} \wedge y_{i-1,j,C} \wedge y_{i-1,j+1,p}$.

(2) $\delta(q, A) = (p, C, L)$이면 $\cdots DqA \cdots \Rightarrow \cdots pDC \cdots$

$A_{i,j} = y_{i,j-1,D} \wedge y_{i,j,q} \wedge y_{i,j+1,A} \wedge y_{i+1,j-1,p} \wedge y_{i-1,j,D} \wedge y_{i-1,j+1,C}$.

(B) $X_{i,j-1}$이나 $X_{i,j+1}$이 상태이거나, $X_{i,j}$가 tape 심벌이다.

$Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$이고 $\Gamma = \{Z_1, Z_2, \cdots, Z_r\}$라고 하자.

$B_{i,j} = (\vee_{1 \le \forall k \le m}\ y_{i,j-1,q_k})$ $X_{i,j-1} \in Q \vee$

$\vee\ (\vee_{1 \le \forall k \le m}\ y_{i,j+1,q_k})$ $X_{i,j+1} \in Q \vee$

$\vee\ ((\vee_{1 \le \forall k \le r}\ y_{i,j,Z_k})\ \wedge$ $(X_{i,j} \in \Gamma \wedge$

$(\vee_{1 \le \forall k \le r}\ (y_{i,j,Z_k} \wedge y_{i+1,j,Z_k}))$ $X_{i,j} = X_{i+1,j})$

(4) 올바르게 끝낸다.(F: Finish)

$\alpha_{p(n)}$에서 끝나고, 최종상태가 $\{f_1, f_2, \cdots, f_q\}$라면,

$F = \vee_{1 \le \forall j \le p(n)}\ \vee_{1 \le \forall k \le q}\ y_{p(n),j,f_k}$.

$|F| \cdot p(n)$개 변수의 $\vee$. $O(p(n))$ 식

(1) 규칙을 지키며 $\wedge$ (2) 잘 시작해서 $\wedge$ (3) 잘 한 후에 $\wedge$ (4) 올바르게 끝내는 위의 증명 과정이 **모든 NP** 문제를 $O(p(n))$의 크기를 가지는 SAT로 polynomial reduction하였으므로 SAT는 정의대로 NP-completeness이다.