1-4 Recursion 혹은 수학적 귀납법과 무한집합

KAIST 전산학과 최광무

Recursion은 자연수와 관련된 무한한 **집합** 또는 **구조**를 유한하게 정의하거나 증명하는데 사용(infinite wisdom)되는 매우 중요한(사실은 유일한) 방법이다.

이는 **무한한 자연수**를 정의함으로서 시작된다[1].

Basis 0은 **자연수**이다. (1)

Recursion 어떤 수가 **자연수**이면 그것보다 하나 더 큰 수도 **자연수**이다. (2)

자연수를 정의하는 위의 구조는 아주 전형적인 recursion의 구조를 가지고 있으며 이를 아래와 같이 **수학기호**를 이용하여 정의할 수 있다.

자연수집합 N을 수학기호를 이용하여 아래와 같이 정의된다.

Basis $0 \in N$.

Recursion $If\ n \in N,\ then\ n{+}{+} \in N$[2].

Recursion' $n \in N \Rightarrow n{+}{+} \in N$.

이 정의는 (1) 자연수의 시작인 0(중학교에서는 그 시작이 1이었다[3])이 자연수임을 기술하는 basis와 (2) n이 자연수 일 때 그 다음 수 $n+1$이 자연수**임**을 기술하는 recursion의 두 개의 구조로 이루어져 있다. 특히 recursion은 1) 가정이 사실이면 결론도 사실이다(가정 ⇒ 결론)라는 전형적인 연역(deduction)구조인 implication(⇒)를 가지면서, 2) **가정**에 정의하고자 하는 **자연수집합** N이 들어있다는 연역적(deduction)인 구조가 아닌 **비연역적**(non-deductive; recursive) 구조를 가지고 있다. 그래서 이를 **recursive 정의**하고 부른다.

이를 좀 더 **일반화**하여 보자.

집합 S는 다음과 같이 정의된다. (3)

Basis $\exists k \geq 1:\ s_1, s_2, \cdots, s_k \in S$.

Recursion $(\exists n \geq 1:\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in S) \Rightarrow (f(x_1, x_2 \cdots, x_n) \in S)$.

이 때 함수 f가 중요하며, 자연수의 경우 n은 1이고 함수 f는 다음 수이다.

교과서 예제 1.19 **뿌리나무**(rooted-tree)의 정의

Basis 노드 하나만 있는 것도 그 노드를 뿌리로 하는 **뿌리나무**이다.

Recursion $T_1, T_2, \cdots, T_n$이 **뿌리나무**라고 하자. 새로운 노드 r에서 각 **뿌리나무** $T_1, T_2, \cdots, T_n$의 **뿌리** $r_1, r_2, \cdots, r_n$로 가는 edge를 연결하면 노드 r을 새로운 **뿌리**로 하는 새로운 **뿌리나무**가 정의된다.

---

1) Peano axiom

2) $n{+}{+} = n+1$이며, Peano axiom에서는 아직 +연산이 정의되지 않아 다음 수 ++를 사용하였다.

3) 셀 수 있는 무한(countably infinite) 집합 $\{1, 2, 3, \cdots\}$과 $\{0, 1, 2, \cdots\}$은 서로 동동(≅; isomorphism)하므로, 두 가지 정의가 모두 옳다.

위의 정의를 좀 더 수학적으로 세련된 표현으로 정의해 보자. 그 이전에 **뿌리나무**라는 틀을 미리 정의하는 것이 수학적으로 더 세련된 방법이다.

뿌리나무 $T = (V, E, r)$

i) V는 노드의 집합,

ii) E는 에지의 집합, 단 $(u,v) \in E$는 노드 $u \in V$에서 노드 $v \in V$로 가는 에지다,

iii) 특별한 노드 $r \in V$은 뿌리다.

Basis $(\{v\}, \varnothing, v)$는 뿌리나무다.

Recursion 자연수 $n(n \geq 1)$에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1)$, $T_2 = (V_2, E_2, r_2)$, $\cdots$, $T_n = (V_n, E_n, r_n)$이 뿌리나무라고 하면, 새로운 노드 $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$을 더하여, $T = (V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \{r\},\ E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \{(r,r_1),(r,r_2),\cdots,(r,r_n)\},\ r)$가 새로운 뿌리나무이다.

Recursion' 자연수 $n(n \geq 1)$에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1)$, $T_2 = (V_2, E_2, r_2)$, $\cdots$, $T_n = (V_n, E_n, r_n)$이 뿌리나무라고 하면, 새로운 뿌리나무 $T = (V, E, r)$는 아래로 정의한다.

i) $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \{r\}$, 단 $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$.

ii) $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \{(r,r_1),(r,r_2),\cdots,(r,r_n)\}$,

교과서 예제 1.20의 식의 정의

Basis 수와 문자는 식이다.

Recursion 식 + 식, 식 - 식, 식 × 식, 식 ÷ 식, (식)[4]은 식이다.

<u>Recursive 정의의 유한성과 무한성</u>

유한한 Recursive 정의로 무한집합을 정의할 수 있다.[5]

<u>Recursive하게 정의된 무한집합이 만족하는 성질의 증명</u>

가정 집합 S가 식(3)에 의하여 정의된 집합이다.

결론 $\forall x \in S,\ p(x)$.

증명 Basis $p(s_1), p(s_2), \cdots, p(s_k),\ k \geq 1$을 증명한다.

Recursion $p(x_1), p(x_2), \cdots, p(x_n),\ n \geq 1 \Rightarrow p(f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$을 증명한다.

4) 가정에 식을 그대로 씀으로서 recursive 가정(…이 식이면)이 생략되었음에 주의하라.

5) Recursive 정의는 사실 무한한 집합을 유한하게 정의하는 유일한 방법이다. 이를 유한한 recursive 정의의 **무한한 지혜**(**infinite wisdom**)라고 부르기도 한다.

(정의) 집합의 동등(Set isomorphism)

두 집합 A와 B사이에 전단사함수(bijection) f가 존재하면, $f(A)=B$이고 $f^{-1}(B)=A$ 이므로, 집합 A와 함수 f로 집합 B를 만들어 낼 수 있고, 집합 B와 함수 f^{-1}로 집합 A를 만들어 낼 수 있어서, 집합 A와 B는 함수 f를 통하여 동등하다(isomorphic w.r.t. f)(같다)고 하고 $A \cong_f B$로 쓴다.

(정의) 집합의 크기(Cardinality of sets)

$$|A| = |B| \overset{\text{def}}{=} A \cong_f B.$$

두 집합이 동등할 때($\cong$) 두 집합이 **크기(cardinality)**가 같다고 정의한다.

유한집합의 동등

{1, 2, 3} ≅ {a, b, c}

무한집합의 동등

(예 1) 1부터 시작하는 자연수 집합 $N_1 = \{1,2,3,\cdots\}$과 0부터 시작하는 자연수 집합 $N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$과 을 생각하자. $N_1=\{1,2,3,\cdots\} \subset N_0=\{0,1,2,\cdots\}$이지만,

f: $N_1 \to N_0$, $\forall i \in N_1$: $f(i-1)$과 f^{-1}: $N_0 \to N_1$, $\forall i \in N_0$: $f^{-1}(i+1)$를 보면 $\{1 \leftrightarrow_f 0,\ 1 \leftrightarrow_f 2,\ 3 \leftrightarrow_f 2,\ \cdots,\ n+1 \leftrightarrow_f n,\ \cdots\}$. 즉 $f(N_1)=N_0$이고 $f^{-1}(N_0)=N_1$ 이므로

$N_1=\{1,2,3,\cdots\} \cong_f N_0=\{0,1,2,\cdots\}$[6]이다. 즉 $|N_1| = |N_0|$이다.

(예 2) 자연수 집합 $N = \{0,1,2,\cdots\}$과 짝수 집합 $E = \{0,2,4,\cdots\}$을 생각하자. $E \subset N$이지만 $E \cong N$이다.

(예 3) 자연수 집합 $N = \{0,1,2,\cdots\}$과 자연수 순서쌍 집합 $N \times N = \{(i,j) | i,j \in N\}$을 생각하자. $N \cong N \times N$[7]이다.

(정의) 자연수의 부분집합과 동등한 집합을 **셀 수 있는**(countable) 집합이라 정의하고, 그렇지 않으면 **셀 수 없**는(uncountable) 집합 이라고 정의한다.

(사실) **셀 수 있는** 집합은 (셀 수 있는)**유한**집합과 **셀 수 있게 무한한** 집합 두 가지 종류가 있다.

(정리) 모든 **셀 수 있는** (무한)집합은 **자연수**에 부분집합과 **동등(isomorphic)**하다.

(사실) 모든 **셀 수 있는** (무한)집합은 **자연수로 번호** 매길 수(**enumerable**[8]) 있다.

$$A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$$

---

6) 중학교에서는 1부터 자연수를 대학교에서는 0부터 자연수를 정의해도 되는 이유이다.
7) 이 때 짝짓기 함수 f는 무엇인가? $N \subset N \times N$인가?
8) RE(Recursively Enumerable)이라고 정의하며, 8장 Turing Machine에서 배운다.

(의문) **셀 수 없는**(uncountable) **무한**집합이 있는가?
(정리) **무한이진수**(infinite binary string)는 **셀 수 없게 무한**(uncountably infinite)하다.
(가정) 무한이진수 집합 $F = \{f \mid f: N \rightarrow \{0,1\}\}$[9]**이 셀 수 있게 무한**하다고 하자.
(결론) $|F|$는 **셀 수 없는 무한**이다.
(증명) **Cantor의 대각선화 주장**(Cantor's diagonal argument, 1812)[10]
집합 F가 **셀 수 있는 무한**이라고 **가정**하자.
그러면 집합 F의 원소 들은 자연수도 번호 매길 수 있을 것이다.

$$F = \{f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots\}$$

$f_0 = (a_{00}, a_{01}, \cdots, a_{0n}, \cdots)$, $\forall i \in N$: $f_0(i) = a_{0i} \in \{0,1\}$,
$f_1 = (a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots)$, $\forall i \in N$: $f_1(i) = a_{1i} \in \{0,1\}$,
$\cdots$
$f_n = (a_{n0}, a_{n1}, \cdots, a_{nn}, \cdots)$, $\forall i \in N$: $f_n(i) = a_{ni} \in \{0,1\}$,
$\cdots$

여기서 대각선(diagonal) 무한이진수 $f = (a_{00}, a_{11}, \cdots, a_{nn}, \cdots)$와 그것의 **부정** $\overline{f}$를 생각하자.

$$f = (a_{00}, a_{11}, \cdots, a_{nn}, \cdots), \ \forall i \in N.$$

$$\overline{f} = (\overline{a_{00}}, \overline{a_{11}}, \cdots, \overline{a_{nn}}, \cdots), \ \forall i \in N: \overline{a_{ii}} = 0, \text{ if } a_{ii} = 1; \ \overline{a_{ii}} = 1, \text{ if } a_{ii} = 0.$$

$\forall i \in N$: $\overline{f} \neq f_i$이어서 $\overline{f} \notin F$이지만,
$\overline{f}$는 집합 F의 원래 정의에 맞는 무한이진수 이므로 $\overline{f} \in F$이어야 한다.
따라서 집합 F가 셀 수 있는 무한이라는 증명 초기의 **가정**이 **거짓**이다.(**귀류법**)
따라서 집합 F는 셀 수 있는 무한이 아니다. 즉 집합 F는 **셀 수 없는 무한**이다.

(사실) 자연수의 **부분집합의 집합**(**멱집합**; Power set)도 **셀 수 없는** 무한이다.
(증명) $\{f \mid f: N \rightarrow \{0,1\}\} \cong_g 2^N$
$011010100\ldots \leftrightarrow_g \{1, 2, 4, 6, \cdots\} \leftrightarrow_{g'} \{2, 3, 5, 7, \cdots\} \cdots$

무한이진수나 **자연수의 부분집합**은 셀 수 없이 많다(uncountably infinite, uncountable)

집합 **크기**(**cardinality**)의 종류
- 셀 수 있는(countable)
  - 유한(finite)
  - 셀 수 있게 많은 무한(countably infinite)
- 셀 수 없는(uncountable)
  - 셀 수 없이 많은 무한(uncountably infinite)

---
9) 집합 F의 원소 f는 0과 1로 이루어진 무한 이진수다. 예, $f = 011010100\ldots$
10) Cantor에 대각선화 증명으로 무리수 $\sqrt{2}$나 π를 포함하는 실수 R이 셀 수 없는 무한임을 증명할 수 있게 됐다.