1-2 이산수학 복습

KAIST 전산학과 최광무

집합, 관계와 그래프, 함수

집합의 표시법

조건제시법으로 집합 P를 정의할 때 조건명제(predicate) $p(x)$를 이용하여,

$$P = \{x \mid p(x)\} \qquad (1)$$

으로 쓰기도 하나, 집합 P에 **전체집합**(universe) U를 특별히 드러내 표시하기도 한다.

$$P = \{x \in U \mid p(x)\} \qquad (2)$$

전체집합 U를 표시하는 조건제시법 (2)는 두 가지 중요한 의미가 있다.

(1) 집합 P를 포함하는 전체집합(universe of discourse) U를 특별히 밝힌다.[1)]

$$P \subseteq U \qquad (3)$$

(2) **조건명제**(predicate) $p(x)$에서 변수 x를 전체제안자(universal quantifier) $\forall$을 이용하여, $\forall x \in U$로 한정(bind)하였기 때문에, $\forall x \in U$: $p(x)$는 **명제**[2)]가 된다.

이 강의에서는 자동기계(automata), 문법(grammar) 또는 프로그램을 이용하여 집합(언어)을 정의하는 방법을 배운다. 이는 집합(언어; languages)을 기계나 컴퓨터를 이용하여 표현하는 **새로운**[3)] 방법으로 여겨져 20세기 초 근대수학에서 매우 중요하게 받아들여졌다.

조건명제와 진리집합(truth set)

(정의) 조건명제 $p(x)$의 **진리집합** $P \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U \mid p(x)\}$로 정의한다.

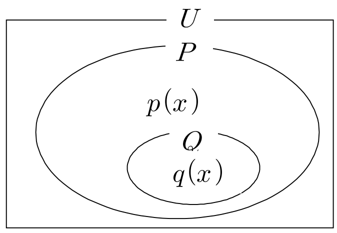
부분집합과 두 집합의 같음(same; equivalent)

(정의) $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$ (4)

(정의) $A = B \stackrel{\text{def}}{=} A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$ (5)

$\equiv (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A).$

(예) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$, $\{F, T\} \neq \{0, 1\}$.



충분조건$p(x)$ $\Rightarrow$ 필요조건$q(x)$

진리집합과 필요조건, 충분조건

(정의) 전체집합 U에서, 조건명제 $p(x)$의 **진리집합이** $P = \{x \in U \mid p(x)\}$이고, 조건명제 $q(x)$의 진리집합이 $Q = \{x \in U \mid q(x)\}$이라 하자. $P \subseteq Q$이면 $\forall x \in U$: $p(x) \Rightarrow q(x)$[4)]이므로, 조건명제 $p(x)$는 조건명제 $q(x)$가 만족하기 위한 **충분조건**이라 부르고, 거꾸로 조건명제 $q(x)$는 조건명제 $p(x)$가 만족하기 위한 **필요조건**이라고 부른다. 또 $P \subseteq Q \wedge P \supseteq Q$, 즉 $P = Q$이면, 조건명제 $p(x)$와 조건명제 $q(x)$는 각각 상대조건을 만족하기 위한 **필요충분조건** 또는 동치(equivalent) 명제라 부르고. $\forall x \in U$: $p(x) \Leftrightarrow q(x)$와 같다.

---

1) 수학에서는 $x \in U$로 쓰고 U를 전체집합이라 부르나, 프로그래밍언어 Java나 C에서는 U x로 쓰고 U를 변수 x에 타입(type)이라 부른다.
2) 명제는 참이나 거짓이 정해진 문장(statement)이다.
3) 이 노력은 1931년 Gödel의 불완전성 정리(Incompleteness Theorem)로 1929년(?) Hilbert가 꾸었던 아름다운 꿈이 실패라는 결론으로 이어져서, 현대수학에 한계를 드러내는 것이나, 2000여년 전에 피타고라스(Pytagoras)가 절망하였던 무리수 $\sqrt{2}$에 비밀을 풀어주는 열쇠가 되기도 한다.
4) 전체집합 U가 명백하면 $p \Rightarrow q$로 짧게 쓰기도 한다.

KAIST 전산학과 최광무

곱집합(Cartesian product)과 관계(Relation) 그래프(Graph)

(정의) 집합 A와 B의 **곱집합**(Cartesian product)을

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a, b) | a \in A, \ b \in B\} \qquad (6)$$

로 정의한다. 이 때 **곱집합**의 원소 (a, b)를 **순서쌍**(ordered pair)[5]이라 부르고, 집합 $A \times B$의 크기는 집합 A의 크기와 B의 크기의 곱이다

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$[6].

(정의) 집합 A에서 B로 가는(from A to B) **관계**(relation) R은 두 집합 A와 B의 **곱집합의 부분집합**으로 정의한다.

$$R \subseteq A \times B \qquad (7)$$

이때 집합 A를 관계 R의 **정의역**(domain), B를 **치역**(range; co-domain)이라 부른다. $(a, b) \in R$일 때 $a R b$로 쓰기도 한다.

(생각문제) 집합 A에서 B로 가는 서로 다른 관계 R은 모두 몇 가지나 있을까?

(정의) 집합 A에서 B로 가는 관계 R의 역관계 $R^{-1} \subseteq B \times A$를 아래로 정의한다.

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | \ (a, b) \in R\}$$

(정의) 관계 R의 정의역과 치역이 같은 집합 A일 때 관계 R은 집합 A에서 정의한(on A) 관계라 부른다.

$$R \subseteq A \times A \qquad (8)$$

(정의) 집합 A에서 정의한 관계 $E \subseteq A \times A$를 에지로 표현한 순서쌍 $G = (A, E)$을 집합 A의 그래프라고 정의한다.

관계에 성질(property)과 그래프

집합 A에서 정의한 관계 R을 에지(edge)로 하는 그래프 $G = (A, R)$에서, 관계 R이 특별한 성질을 만족할 때 그래프를 간단히 그릴 수 있다.

(1) 관계가 **reflexive**[7]하면, 모든 노드에서 자기 자신으로 가는 에지(self edge)가 **항상 있고**, **irreflexive**하면 self edge가 **항상 없으므로**, 관계가 reflexive인지 irreflexive인지를 미리 알고 있다면, 그래프에서 self edge는 따로 표시하지 않을 수 있다.

(2) 양방향으로 모두 화살표가 있는 **symmetric**한 경우 에지에 화살표를 표시하지 않고 그냥 선으로 표시할 수 있다(undirected graph). **Antisymmetric** 또는 **asymmetric**하면 한 방향으로만 에지가 있는 것이므로, 에지에서 화살표를 빼고 선으로(undirected) 그래프로 간단하게 표현할 수도 있다. 다만 한 방향으로만 에지가 있는 antisymmetric이나 asymmetric일 때는 에지가 시작하는 노드를 위쪽에 그려서 그래프로 표현하기도 한다(예: 뿌리나무(rooted tree)).

(3) **Transitive**하면, 처음 노드에서 마지막 노드로 중간 노드를 통하여 에지가 연결하면, 반드시 처음 노드에서 마지막 노드로 에지가 직접 있는 경우이다[8]. 모든 연결을 다 표시하

5) $(a,b) \neq (b,a)$이고 $\{a,b\} = \{b,a\}$인 집합과는 다르므로 **순서**쌍이라고 부른다.
6) **합집합** $A \cup B$의 크기는 $|A \cup B| \leq |A| + |B|$임에 유의하라.
7) 관계의 성질인 i) reflexive와 irreflexive, ii) symmetric과 asymmetric antisymmetric, iii) transitive에 정확한 정의는 강의TP나 이산수학 교과서를 참조하시오.
8) $R \ is \ transitive. \overset{\text{def}}{=} \forall a, b, c \in A: \ aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc.$

는 것은 낭비이고 기본적인 연결 상황만을 나타내면 충분하고, 이 기본적인 연결 상황을 Hasse diagram이라 부른다.

(예) 자연수의 집합 N에서 정의한 관계의 예 $(=, <, \leq) \subseteq N \times N$

$= \ \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in N \times N \mid a = b\}$

reflexive, symmetric, transitive

$< \ \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in N \times N \mid a < b\}$

irreflexive, asymmetric, antisymmetric, transitive

$\leq \ \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in N \times N \mid a < b \vee a = b\} \quad = (< \cup =)$

reflexive, antisymmetric, transitive

(정의) 집합 정의역과 치역이 같은 집합 A에서 정의한 관계 R은 **합성**(composition 또는 **곱**(product))이 쉽게 정의되므로 관계 R이 여러(n)번 계속 곱하여지는 **반복곱** R^n ($n \geq 0$)을 아래와 같이 **recursive**하게 정의한다.

$R^0 \stackrel{\text{def}}{=}_{\text{B}} id_A$ 단 $id_A = \{(a,a) | a \in A\}$[9].

$R^n \stackrel{\text{def}}{=}_{\text{R}} R^{n-1} \circ R \qquad n \geq 1.$ (9)

관계의 p-closure

집합 A안에 있는 관계 R과 관계 R의 성질의 집합 $P = \{reflexive, symmetric, transitive\}$의 원소 $p \in P$의 $p-closure$ R'을 아래와 같이 정의한다.

$R' \supseteq R$을 만족하는 집합 A안에 있는 관계 중에 성질 $p \in P$를 만족하는 **가장 적은** 관계이다.

(정의) $A \subseteq B$일 때 집합 A가 집합 B보다 적거나 같다고 한다.

(예) Reflexive closure of R, $R' = R \cup id_A$.

Symmetric closure of R, $R' = R \cup R^{-1}$.

Transitive closure of R, $R^{\dagger} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \bigcup_{i \in N_1} R^i$.

Reflexive and transitive closure of R, $R^* = R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \cdots = \bigcup_{i \in N_0} R^i$.

함수(function)

(정의) 집합 A에서 B로 가는 **관계** f중 (1) 정의역 A의 **모든**(total) 원소 $a \in A$에 대하여 관계 afb(또는 $(a,b) \in f$)가 있는 $b \in B$가 (2) 치역 B에 반드시 **하나만**(unique) 있는 경우, **관계** f를 **집합 A에서 B로 가는 함수** f라 하고,

$f : A \rightarrow B$

로 표시하며 특히 afb 또는 $(a,b) \in f$ 대신 $f(a) = b$로 표시하기도 한다. 이 때 집합 A를 함수 f의 정의역(domain) 집합 B를 함수 f의 치역(range)이라 한다.

$f : A \rightarrow B$, if $(f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a \in A : \exists_1 b \in B, afb)$

---

9) $\forall R \subseteq A \times A$: $R \circ id_A = id_A \circ R = R$. id_A는 합성($\circ$)에 관한 항등원(identity element)이다.

위의 조건 (1) 정의역에 모든 …은 만족하지 않지만 (2) 치역에 하나만 …은 만족할 때 관계 f를 부분함수(partial function)라 부르고,

$f: A \mapsto B$, if $(f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a \in A: [(\exists_1 b \in B, afb) \vee (\nexists b \in B, afb)])$[10]

(1) (2)를 모두 만족하는 함수를 전체함수(total function)라 부르기도 한다.

$f: A \to B$, if $(f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a \in A: \exists_1 b \in B, afb)$

함수 $f: A \to B$의 역함수 $f^{-1}: B \to A$는 함수가 **아니고 관계**다. f^{-1}가 함수가 되려면,

(1) 정의역 B에 모든 …을 만족해야 하고, 즉

$\forall b \in B: \exists a \in A: afb$ 또는 $\forall b \in B: \exists f^{-1}(b) \in A$이면

함수 $f: A \to B$는 onto 함수(correspondence) 또는 surjection(전사함수)라 부르고,

$|A| \geq |B|$이다.

(2) 치역 A에 하나만 …도 만족해야 한다. 즉

$\forall a \in A: \exists_1 b \in B: afb$ 또는 $b \in B: \exists_1 f^{-1}(b) \in A$이면

함수 $f: A \to B$는 one-to-one(1:1) 함수 또는 injection(단사함수)라 부르고,

$|A| \leq |B|$이다.

함수 $f: A \to B$의 역함수 $f^{-1}: B \to A$도 함수이면 함수 $f: A \to B$는 one-to-one onto 함수(1-1 correspondence; **짝짓기**) 또는 bijection(전단사함수)이라 부르고

$|A| = |B|$이다.

<u>집합에 동등(isomorphism[11])</u>

(정의) $A \cong_f B \stackrel{\text{def}}{=} (\exists f: A \to B \wedge \exists f^{-1}: B \to A)$.

$\equiv \exists f: A \leftrightarrow B$.

$A \cong_f B$일 때, $|A| = |B|$이고 집합 A와 집합 B는 함수 f를 통하여(with respect to; w.r.t.) 동등(isomorphic)하다고 한다. 집합 A와 집합 B가 **짝짓기**함수 f를 통하여 동등하다는 말은, $B = f(A)$로 $A = f^{-1}(B)$로 나타낼 수 있기 때문이다. **짝짓기** 함수[12] f를 생략하고 $A \cong B$로 간단히 쓸 수도 있다.

(정의) $|A| = |B| \stackrel{\text{def}}{=} A \cong B$.

두 집합이 동등할 때($\cong$) 두 집합이 **크기(cardinality)**가 같다고 정의한다.

(예) $\{a, b, c\} \neq \{1, 2, 3\}$ 이지만 $\{a, b, c\} \cong_f \{1, 2, 3\}$이다. 이 때 짝짓기 함수 f는 무엇일까? 물론 집합의 크기는 $|\{a, b, c\}| = |\{1, 2, 3\}| = 3$으로 같다.

집합의 동등함($\cong$)은 집합의 같음($=$)을 포함하는($\supseteq$) 더 큰 개념이다.

(예) 학생 집합과 그 학생의 학번집합은 같지($\subseteq$, $\supseteq$)는 않지만 동등하다($\cong_f$).

---

10) 부분함수의 조건을 $|f(a)| \leq 1$로 쓰는 책도 있다.
11) Equivalent(같음; same)와 구분하기 위하여 isomorphism(동등)이라는 다른 용어를 사용하였다.
12) 짝짓기 함수는 1-1 onto 함수를 뜻한다.

멱집합(Power Set)

(정의) 집합 A의 부분집합의 집합을 집합 A의 멱집합(power sets)이라 부르고 2^A 또는 $\wp(A)$로 쓴다.

$2^A \overset{\text{def}}{\equiv} \{B \mid B \subseteq A\}$.

(예) $2^{\{0,1,2\}} = \{\ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\ \}$.

(사실) $|2^A| = 2^{|A|}$.

(증명) 생략.

(정의) 집합 A에서 B로 가는 함수의 집합을 B^A라 쓴다.

$B^A \overset{\text{def}}{\equiv} \{f \mid f: A \to B\}$.

(예) $\{T, F\}^{\{0,1,2\}} \overset{\text{def}}{\equiv} \{$

$\{(0,F),(1,F),(2,F)\}, \{(0,F),(1,F),(2,T)\}, \{(0,F),(1,T),(2,F)\}, \{(0,F),(1,T),(2,T)\},$

$\{(0,T),(1,F),(2,F)\}, \{(0,T),(1,F),(2,T)\}, \{(0,T),(1,T),(2,F)\}, \{(0,T),(1,T),(2,T)\}\ \}$

$\cong \{\ (F_0F_1F_2),\ (F_0F_1T_2),\ (F_0T_1F_2),\ (F_0T_1T_2),$

$(T_0F_1F_2),\ (T_0F_1T_2),\ (T_0T_1F_2),\ (T_0T_1T_2)\ \}$

$\cong \{\ 000_2,\ 001_2,\ 010_2,\ 011_2,\ 100_2,\ 101_2,\ 110_2,\ 111_2\ \}$

(사실) $|B^A| = |B|^{|A|}$.

(증명) 생략.

(정의) 집합 A가 유한하면 $B^A \cong B^{|A|}$이므로, B^n(단 $|A| = n$)으로 간단히 쓰기도 한다.

(예) $\{T, F\}^{\{0,1,2\}} \cong \{T, F\}^{\{a,b,c\}} \cong \{0,1\}^{\{1,2,3\}} \cong \{0,1\}^3$

(사실) B^n는 $|B|$-진수[13] 길이 n짜리 문자열(string)[14]이다.

(사실) 집합 A에 멱집합 2^A은 집합 A에서 집합 $\{0,1\}$로 가는 함수와 동등하다.

$2^A \cong \{0,1\}^A$.

(예) $A = \{0,1,2\}$일 때, $2^A = \{\ \varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0,1,2\}\ \}$

$\leftrightarrow_f \{\ 0_00_10_2,\ 0_00_11_2,\ 0_01_10_2,\ 0_01_11_2,\ 1_00_10_2,\ 1_00_11_2,\ 1_01_10_2,\ 1_01_11_2\ \}$

$\varnothing \leftrightarrow_f 0_00_10_2$, $\{0\} \leftrightarrow_f 1_00_10_2$, $\{1\} \leftrightarrow_f 0_01_10_2$, $\{2\} \leftrightarrow_f 0_00_11_2$,

$\{0,1\} \leftrightarrow_f 1_01_10_2$, $\{0,2\} \leftrightarrow_f 1_00_11_2$, $\{1,2\} \leftrightarrow_f 0_01_11_2$, $\{0,1,2\} \leftrightarrow_f 1_01_11_2$.

(증명) $A = \{1, 2, \cdots, n\}$라 하자, $b_1b_2 \cdots b_n \in \{0,1\}^n$(단 $1 \leqq \forall i \leqq n$: $b_i \in \{0,1\}$)

$b_1b_2 \cdots b_n \leftrightarrow_f \{i \in A \mid 1 \leqq \forall i \leqq n:\ b_i = 1\}$

13) n-진수는 n-진법을 말하는 것으로 위에 예는 이진수(binary number) 문자열이다.
14) 문자열(string)은 1-3에서 다시 자세히 다룬다.

<u>관계를 함수로 표기하기</u>

관계 $R \subseteq A \times B$이고 $a \in A$에 대하여 $a R b_1$, $a R b_2$, $\cdots$, $a R b_k$일 때,

$R(a) = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\} \subseteq B$로 쓰기도 한다.

단 $k \geq 0$이고, $k = 0$이면 $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\} = \varnothing$이라 본다.

이 때 $R: A \rightarrow 2^B$으로 볼 수도 있다[15].

즉 관계 $R \subseteq A \times B$을 정의역이 집합 A이고, 치역이 집합 B의 **부분집합**으로 하는 **함수**(**set valued function**)로 볼 수도 있다[16].

---

15) $R_1 \subseteq A \times B$이고 $R_2: A \rightarrow 2^B$이라고 할 때 $R_1 \leftrightarrow R_2$이고 $R_1 \cong R_2$이므로 $R_1 = R_2$로 볼 수 있다.

16) 관계 R은 함수인가 함수가 아닌가?