(해설)

1-(1). $|F|=|B|^{|A|}$이므로 $|\{r\,|\,r\subseteq F\times F\}|=2^{|B|^{2|A|}}$.

1-(2).

Reflexive : $\forall f\in F,\ \forall a\in A,\ f(a)+f(a)=2f(a)\in\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\text{는 짝수}\}.\ \therefore \forall f\in F,\ fRf.$

Symmetric : 만약 f_1Rf_2이면 $\forall a\in A,\ f_1(a)+f_2(a)\in\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\text{는 짝수}\}$ 이다.

즉 $\forall a\in A,\ f_2(a)+f_1(a)\in\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\text{는 짝수}\}$이므로 f_2Rf_1이다.

Transitive : 만약 f_1Rf_2, f_2Rf_3이면

$\forall a\in A,\ f_1(a)+f_2(a),\ f_2(a)+f_3(a)\in\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\text{는 짝수}\}$이고, $f_1(a)+2f_2(a)+f_3(a)$의 값도 짝수이다. 따라서 $\forall a\in A,\ f_1(a)+f_3(a)\in\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\text{는 짝수}\}$이므로 f_1Rf_3이다.

위의 세 가지 성질을 만족하므로 R은 equivalence relation 이다.

1-(3). 이 문제는 관계 R에서 집합 F의 partition 개수를 구하는 것이다.

집합 B에 짝수만 있거나 홀수만 있을 때 : $1^{|A|}=1$

집합 B에 짝수, 홀수가 모두 있을 때 : $2^{|A|}$

2-(1). 집합 A가 셀 수 있는 무한이라고 가정했을 때, A의 원소들은 자연수로 번호매길 수 있다. $A=\{a_0,a_1,...,a_n,...\}$

그렇다면 $a_k=(e_{k0},e_{k1},...,e_{kn},...),\ \forall i\in N,\ e_{ki}\in\{0,1\}$이고, 아래와 같은 모양이 될 것이다.

$a_0=(0,1,1,...)$
$a_1=(1,0,1,...)$
$a_2=(0,0,1,...)$
...

a_k들의 대각선 원소들을 모은 $a=(0,0,1,...)$이 되며, 이 부정은 모든 a_k와 같지 않으므로 집합 A에 포함되지 않아야 한다. 하지만, 정의에 의해서 집합 A에 포함되어야 하기 때문에, 모순이 발생하며, 집합 A는 셀 수 없는 무한이다.

2-(2). 자연수의 멱집합이 무한이진수 집합과 동등함을 보이면 됨.

자세한 증명이 없어도 논리에 이상이 없으면 점수를 줄 것.