

# NP complete는 수학인가?

최광무

전산학과, KAIST

2013. 5. 3.

# 문제를 푼다(Program한다)

- 문제(Problem)와 그 문제를 푸는 것(Program)은 다르다
- 문제(Problem)
  - 무엇을 푸는가?
  - What?
- 문제를 푸는 것(Program)
  - 문제를 어떻게 푸는가
    - 얼마나 빨리 푸는가?
  - How?
  - 하나의 문제 X를 푸는 방법(program) P(X)는 여러 개가 있다.
- 주어진 문제 X를 푸는 여러 방법 P(X) 중에
  - 최선의 방법(Optimal solution) O
    - 문제 X를 방법 O보다 더 빨리 풀 수 있는 방법은 없다는 증명을 했다
    - 예) sorting 문제는  $O(n \log n)$  이다
  - 차선의 방법(Worst case solution) W
    - 문제 X를 풀었으나 그 방법이 최선이라는 증명은 아직(?) 못했다
    - 현재까지 알려진 최선의 방법
  - 현명하지 않은 방법
    - 문제 X를 최선의 방법 O나 현재까지 알려진 최선의 방법 W 보다도 더 늦게 푼다ㅠㅠ

# NP complete 와 TSP 문제

- NP complete 문제 X의 정의
  - 1) 문제 X가 NP 문제이다
    - 모든 NP 문제의 알려진 최선의(차선) 방법은 E이다
  - 2) 문제 X는 모든 NP 문제보다도 늦거나 같게 풀린다
    - 하지만 NP 문제 중에 P로 풀리는 문제도 많다
- NP complete는 NP짱이다.
- NP complete 문제 중 하나만 P이라도 모든 NP는 P이다
  - $P = NP$
- Traveling Salesman Problem(TSP)
  - 지도가 주어질  $n$ 개의 도시를 같은 도로를 또 다시 지나지 않고, 모든 도시를 방문할 수 있는가 하는 문제이다.
  - 두 도시간에 연결된 도로가  $k$ 개( $k \leq n$ ) 보다 적으면 차선의 방법(NP)으로  $O(k^n)$ 에 풀 수 있다.
  - TSP는 가장 유명한 NP complete 문제이다.

# Cook의 NP complete 생각 배경

- 배경1: 주어진(적당히 큰) 자연수  $k$ 와  
주어질(충분히 커질 수도 있는) 자연수  $n$ 에 관하여
  - P(Polynomial, 산술급수)  $O(n^k)$  tractable(쉽게 푼다)
  - E(Exponential, 기하급수)  $O(k^n)$  intractable(어렵게 푼다)
- 배경2
  - NP 문제의 현재까지 알려진 최선의(차선의; worst case) 해결방법은 E다
- 배경3 서양 논리학의 비극이지만 ...
  - 피타고라스의 root(2) B.C 6c
  - Cantor의 diagonal argument, Russell의 paradox, Gödel의 Incompleteness Theorem 19c~20c초
- Cook의 행복한(?) 결론
  - $P \subsetneq NP$
  - $P = NP$

# Uncountable과 Intractable은 다르다

- Cantor의 diagonal argument
  - $|2^N| > |N|$  uncountable (infinite)
    - 단  $N$ 은 무한한( $\infty$ ) 자연수의 집합이다.
  - 피타고라스의 무리수에 관한 2000년 만에 수학적 해답
- 하지만
  - $|N^2| = |N|$  countable (infinite)
- $n < n^2 < n^3 < \dots n^k \dots < 2^n < 3^n < \dots k^n \dots$   
  
 $\ll |N| = |N|^2 = |N|^3 = \dots ||N||^k \dots \ll 2^{|N|} = 3^{|N|} = \dots k^{|N|} \dots$
- $n^{6.02 \times 10^{23}} \geq 2^n$ 의 해는  
 $n \geq 10^{30}$

# 문제의 4가지 종류

	Polynomial	Exponential
Finite	Tractable	Intractable
Infinite	Countable	Uncountable

- P tractable 프로그램
- E intractable 프로그램
- $|N|$  끝나지 않는 프로그램
- $|2^N|$  프로그램 할 수 없다
  - Cantor, Russell, Gödel
  - halting problem

# 최광무교수의 생각

- 무한과 유한은 수학적으로는 크게 다르다
- Intractable도 아주 나쁜 것은 아니다
  - NP complete도 프로그램 할 수 있다
  - 생각은 Parallel(Nondeterministic)하게 하라!
- NP complete는 cowboy 수학이다
  - NP = P라는 수학적 증명은 아마 할 수 없을 것이다
  - NP complete를 현실적으로 해결하는 방법은 있을 것이다.
    - 이 비디오
  - Moral of mathematicians

# P ?= NP 문제는

- 운 좋아야, 현실적인 비용으로 끝낼 수 있는 일들이
- 과연 운에 기대지 않고도, 현실적으로 가능한가?