

7.4.4 CYK¹⁾ 알고리즘

(개요) Context-Free 언어의 membership을 판정하는 $O(n^3)$ 알고리즘이다.

(정리) 주어진 문법의 $G = (N, T, P, S)$ 와 문자열 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 에 관하여 n 터미널의 집합 $X_{i,j}$ 를 아래와 같이 정의하면,

$$1 \leq \forall i \leq \forall j \leq n: X_{i,j} = \{A \in N \mid A \Rightarrow^* a_i \cdots a_j\},$$

문자열의 membership 문제는 시작문자 S 의 $X_{1,n}$ 에 포함문제로 바뀐다.

$$\text{즉, } a_1 a_2 \cdots a_n \in L(G) \Leftrightarrow S \in X_{1,n}.$$

그러나 $X_{1,n}$ 을 구하기 위하여, $1 \leq \forall i \leq \forall j \leq n$ 에 대하여 $X_{i,j}$ 를 구하여야하므로 문자열의 언어 membership 문제는 $X_{i,j}$ 의 계산문제로 바뀐다.

(기본) $1 \leq \forall i \leq n$:

$$X_{i,i} = \{A \in N \mid A \rightarrow a \in P, a = a_i\}.$$

(반복) $1 \leq \forall i < \forall j \leq n$:

$$X_{i,j} = \{A \in N \mid A \rightarrow BC \in P, i \leq \forall k \leq j, B \in X_{i,k}, C \in X_{k+1,j}\}$$

(기본)은 $1 \leq \forall i \leq n$ 에 대하여 $A \rightarrow a_i$ 형태의 규칙이 있으면, A 를 $X_{i,i}$ 에 추가하고, (반복)은 $1 \leq \forall i < \forall j \leq n$ 에 대하여 $A \rightarrow BC$ 인 규칙이 있으면, $i \leq \forall k \leq j$ 인 k 에 대하여 $B \in X_{i,k}$ 이고 $C \in X_{k+1,j}$ 이면 A 를 $X_{i,j}$ 에 추가한다. CYK 알고리즘의 시간 복잡도는 $O(n^3)$ 이다.

(반복)에서 $X_{i,j}$ 를 구하는 논리식은 전혀 문제가 없다. 그러나 이를 아래와 같이 for 반복 구조(loop)로 써보면 문제가 생긴다.

(알고리즘) $1 \leq \forall i < \forall j \leq n$: $X_{i,j}$ 의 잘못된 계산

$$1 \leq \forall i < n:$$

$$i < \forall j \leq n:$$

$X_{i,j}$ 을 계산한다.

$$i \leq \forall k \leq j:$$

$$A \rightarrow BC \in P \wedge B \in X_{i,k} \wedge C \in X_{k+1,j} \Rightarrow A \in X_{i,j}.$$

For \forall 반복구조에서는 반복변수(index variable) i, j, k^2 에는 순서가 있으므로, $X_{i,j}$ 을 계산할 때 $k \leq j$ 이어서 아직 계산하지 못한 $X_{k+1,j}$ 가 C 를 포함하는가를 살펴보아야 한다.

이것은 논리(혹은 수학; what)에는 순서가 정해져있지 않으나(non-deterministic), 알고리즘(how)에는 순서가 정해져있기(deterministic) 때문이다.

1) J. Coke, D. Younger, T. Kasami, 세 사람의 성의 첫째 알파벳을 뺐다.

2) 반복변수 k (innermost loop)가 가장 먼저 변한다.

(알고리즘) $1 \leq \forall i < \forall j \leq n$: $X_{i,j}$ 의 올바른 계산

$1 \leq \forall m < n$:

$m \leq \forall i < n$:

$X_{i,i+m}$ 을 계산한다.

$i \leq \forall k \leq i+m$:

$A \rightarrow BC \in P \wedge B \in X_{i,k} \wedge C \in X_{k+1,i+m} \Rightarrow A \in X_{i,i+m}$.

$1 \leq \forall (j-i) < n$:

$j-i \leq \forall i < n$:

$X_{i,j}$ 을 계산한다.

$i \leq \forall k \leq j$:

$A \rightarrow BC \in P \wedge B \in X_{i,k} \wedge C \in X_{k+1,j} \Rightarrow A \in X_{i,j}$.

위의 알고리즘에 For \forall 반복구조에서는 가장 천천히 변하는(outermost loop) 변수 m 을 $X_{i,j}$ 의 $j-i$ 값으로 하였으므로, $X_{i,i+m}$ 을 계산할 때, $i \leq k \leq i+m$ 이므로 살펴보는 $X_{i,k}$ 와 $X_{k+1,i+m}$ 가 모두 이미 계산되어있다.

CYK 알고리즘은 주어진 문자열 $a_1 a_2 \dots a_n$ 과 주어진 context-free 문법(CFG) G 에 대하여 $a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$ 인가 아닌가를 판정하는 context-free 언어의 membership 문제의 해결 방법에 하나이다. CYK 알고리즘은 문자열 $a_1 a_2 \dots a_n$ 에 따라서 파서를 따로 만들어야 한다는 단점이 있고, 시간 복잡도는 $O(n^3)$ 이다.

반면에 6장에서 공부한 좌파서(left parser)나 우파서(right parser)는, 문법 G 가 정해지면, 문자열에 관계없이 파서가 변하지 않는다는 장점이 있고, 문장의 파스(parse)가 $\pi \in P^*$ 라면, 유도(derivation)의 길이가 $n+|\pi|$ 이므로 시간 복잡도는 $O(n)$ 이다.

좌파서나 우파서는 모두 non-deterministic 알고리즘이므로 10장에서 배울 NP 문제다. 그러나 CYK는 알고리즘은 deterministic 복잡도는 $O(n^3)$ 로 늘었으나, CFG 파싱(parsing) 문제를 NP에서 P로 줄였다는 의미를 가진다³⁾.

3) CFG 파싱이 NP-complete 아니라는 증명이고, NP중에 P인 문제도 있다는 좋은 예이다.