

수학기초

(정의) **Equivalent** relation $R \subseteq A \times A$ 이 정의한 equivalent class¹⁾의 집합이 **Partition**,

$$Par_R(A) = \{[a]_R \mid a \in A\} \text{이고,}$$

이 Partition의 크기²⁾ $|Par_R(A)|$ 를 equivalent relation R 의 **index**라 부른다.

(정리) 두 개의 equivalent relation $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ 이 $R_1 \subseteq R_2$ 이면 equivalent class

$$[a]_{R_1} \subseteq [a]_{R_2} \text{이고,}$$

equivalent relation R 의 index가 $|Par_{R_1}(A)| \geq^3) |Par_{R_2}(A)|$ 이므로,

equivalent relation R_1 이 equivalent relation R_2 보다 더 **정교한**⁴⁾ partition을 가지고 equivalent relation R_2 가 equivalent relation R_1 보다 더 **성근** partition을 가진다고 한다.

(예 1) 집합 $A = \{a, b, c, d\}$ 에 관한 두 개의 equivalent relation

$$R_1/id_A = \{(b, c), (c, b)\}$$

$$R_2/id_A = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\} \text{를 생각하자.}$$

$$R_1 \subset R_2 \text{이고}$$

$$Par_{R_1}(A) = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}, Par_{R_2}(A) = \{\{a, b, c\}, \{d\}\} \text{이며}$$

$$\{a\}, \{b, c\} \subset \{a, b, c\}, \{d\} = \{d\} \text{이다.}$$

$$|Par_{R_1}(A)| = 3 > |Par_{R_2}(A)| = 2 \text{이다.}$$

(예 2) 두 개의 **극단적인** equivalent relation $id_A, A \times A \subseteq A \times A$ 을 생각하자. 각각의 equivalent class는

$$[a]_{id_A} = \{a\} \subseteq [a]_{A \times A} = A \text{이므로,}$$

equivalent relation R 의 index가

$$|Par_{id_A}(A)| = |A| \geq |Par_{A \times A}(A)| = 1 \text{이다.}$$

가장 작은⁵⁾ equivalent relation id_A 가 가장 **정교한** partition을, 가장 큰 equivalent relation $A \times A$ 가 가장 **성근** partition을 가진다.

(정의) Equivalent relation $R \subseteq A \times A$ 가

$$\forall a, b, c \in A: a R b \Rightarrow ac R bc \text{이면}$$

Equivalent relation R 은 **right invariant**하다고 한다.

(정의) 임의의 오토마타 M 에 관련된 relation $R_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$x, y \in \Sigma^*, x R_M y, \text{ iff } \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y).$$

(사실) R_M 은 **right invariant** equivalent relation이다.

1) equivalent class는 $[a]_R = \{b \in A \mid a R b\}$ 로 정의하였다.

2) 또는 equivalent class의 수

3) 부분집합 \subseteq 의 방향과 부등호 \geq 의 방향이 반대임에 주의하자.

4) R_1 is a **refinement** of R_2

5) $id_A \subseteq A \times A$ 의 관점에서(with respect to \subseteq) 작다는 뜻이다.

오토마타의 **상태**는 스트링의 **equivalent class**이다. 오토마타의 상태는 이 상태로 오기에 필요한 스트링들의 집합과 동등하다.

(정의) 임의의 언어 L 에 관련된 relation $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$x, y \in \Sigma^*, x R_L y, \text{ iff } \forall z \in \Sigma^*: xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

(사실) R_L 도 **right invariant** equivalent relation이다.

(정리) (Myhill-Nerode Theorem) 다음 세 문장은 같다.

- (1) 언어 $L \subseteq \Sigma^*$ 이 regular하다.
- (2) 언어 L 이 오토마타 M 에 관련된 right invariant한 equivalent relation R_M 의 **유한한** equivalent class들의 합이다.
- (3) 언어 L 에 관련된 R_L 의 right invariant한 equivalent relation의 index가 **유한**하다.

(증명)

(1) \rightarrow (2) 언어 L 이 regular하므로 언어 L 을 받아들이는 오토마타 M 이 존재한다.

오토마타 M 과 관련된 relation $R_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ 을 보자.

R_M 은 $=$ 와 관련된 relation이므로 reflexive하고 symmetric하며 transitive하다.

즉 **equivalent**하다. 또한 $x R_M y$, 즉 $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$ 이면

$$\delta(q_0, xz) = \delta(\delta(q_0, x), z) = \delta(\delta(q_0, y), z) = \delta(q_0, yz) \text{이므로 } xz R_M yz \text{이다. 즉 } \mathbf{right}$$

invariant하다. 따라서 언어 L 은 right invariant equivalent relation R_M 의 **유한한** equivalent class들의 합이다⁶⁾.

(2) \rightarrow (3) 언어 L 이 어떤 오토마타 M 과 관련된 right invariant equivalent relation R_M 의 **유한한** equivalent class들의 합이라고 하자.

R_M 이 right invariant하므로 $\forall z \in \Sigma^*: x R_M y \Rightarrow xz R_M yz$ 이고,

$$xz R_M yz \text{는 } \delta(q_0, xz) = \delta(q_0, yz) \text{이므로 } xz \in L \Leftrightarrow yz \in L \text{이다. 즉 } x R_L y \text{이다.}$$

정리하면 $x R_M y \Rightarrow x R_L y$ 이다. 즉 R_L 의 equivalent index가 유한하다.

$R_M \subseteq R_L$ 이므로 오토마타 M 과 관련된 equivalent relation R_M 이 더 **정교한** partition을 언어 L 과 관련된 R_L 이 더 **성근**⁷⁾ partition을 가진다.

(3) \rightarrow (1) 언어 L 에 관하여 정의된 equivalent relation R_L 이 유한한 index를 가진다 하자.

오토마타 M_L 를

$$M_L = (\{[x]_L \mid x \in \Sigma^*\}, \Sigma, \{\delta([x]_L, a) = [xa]_L \mid x \in \Sigma^*, a \in \Sigma\}, [\epsilon]_L, \{[x]_L \mid x \in L\})$$

이라 하자.

6) 상태가 유한하므로 최종상태도 유한하다.

7) Regular 언어 L 을 받아들이는 DFA의 상태 수의 **최소값**이 $|Par_{R_L}(\Sigma^*)|$ 이다.

R_L 이 **right invariant**하므로 $\forall y \in [x]_L, \forall a \in \Sigma: ya \in [xa]_L$ 이고, $\delta([x]_L, a) = [xa]_L$ 이 적절하다⁸⁾.

또한 $\forall x \in \Sigma^*: \delta([\epsilon]_L, x) = [x]_L$ 이고 $[x]_L \in F$, iff $x \in L$ 이므로 $L = L(M_L)$ 이다.

즉 언어 L 을 받아들이는 임의의 DFA M 에 대하여 $R_M \subseteq R_L$ 이므로, 오토마타 M_L 이 $L = L(M)$ 인 DFA중 가장 **성근 index**⁹⁾를 가진다,

즉 state의 수가 **가장 작다**(Minimal state DFA).

8) Deterministic FA이다.

9) $Par_{R_L}(\Sigma^*) = Par_{R_{M_L}}(\Sigma^*)$