

정규언어에 닫혀있는 성질(Closure Properties of Regular Languages)

4.3 대수계와 모노이드에 관한 복습

(정의) $\forall a, b \in A : \exists a \oplus b \in A$ 일 때, \oplus 를 집합 A 에서 정의된 이진연산(binary operation)이라 부르고, 이진연산 \oplus 가 집합 A 에 닫혀있다(closed)고 하고, 연산 \oplus 를 $\oplus : A \times A \rightarrow A$ 로 표시된다.

(정의) A 가 집합이고 \oplus 가 집합 A 에서 정의된 이진연산일 때 순서쌍 (A, \oplus) 를 대수계(algebraic system)이라 부른다.

(예) 자연수의 집합 N 과 자연수에서 정의된 이진연산 더하기, $+$,는 닫혀¹⁾있고 $(N, +)$ 는 대수계이다.

(정의) (A, \oplus) 가 대수계이고 이진연산 \oplus 가 associative할 때, 순서쌍 (A, \oplus) 를 반 그룹(semi-group)이라 부른다.

$$\forall a, b, c \in A, a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

(정리) (A, \oplus) 가 반 그룹이면, 이진연산 \oplus 는 n 진(n -ary)연산이 된다.

(사실) (A, \oplus) 가 반 그룹이고 $B \subseteq A$ 면,

$$\bigoplus_{a \in B} B \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n, \text{ 단 } B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

(예) $(N, +)$ 는 반 그룹이고, $\sum_{i=1}^{100} i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in \{1, 2, \dots, 100\}} i$.

(정의) (A, \oplus) 가 대수계일 때, $\forall a \in A, \exists e \in A : a \oplus e = e \oplus a = a$ 이면 e 를 집합 A 의 연산 \oplus 에 관한 항등원(identity element)이라고 부른다.

(정의) (A, \oplus) 가 반그룹이고 $e \in A$ 가 항등원일 때, (A, \oplus, e) 는 모노이드(monoid)라고 부른다.

(예) $(N, +, 0)$ 와 $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ 은 모노이드이다.

4.4 정규언어에 관하여 닫혀있는 성질(정수언어 클래스와 대수계)

(정의) \mathbb{L}_{Reg} 을 regular 언어들의 class라고 하고 \mathbb{R}_{Reg} 을 regular expression들의 class라고 하자.

(정리) $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \cup), (\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \cdot), (\mathbb{L}_{\text{Reg}}, *)$ 는 대수계이다.

(증명1) $\forall L, L_1, L_2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}, L(E) = L, L(E_1) = L_1, L(E_2) = L_2$ 인 $\exists E, E_1, E_2 \in \mathbb{R}_{\text{Reg}}$ 이라면, $E_1 + E_2, E_1 E_2, E^* \in \mathbb{R}_{\text{Reg}}$ 는 $L_1 \cup L_2, L_1 \cdot L_2, L^* \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}$ 을 각각 나타내는 정규식이다.

(증명2) $\forall L, L_1, L_2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}, L(M) = L, L(M_1) = L_1, L(M_2) = L_2$ 인 $\exists M, M_1, M_2 \in \mathbb{M}_{\text{FA}}$ 이라면, $L_1 \cup L_2, L_1 \cdot L_2, L^* \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}$ 을 각각 받아들이는(accept) $M_{\cup}, M_{\cdot}, M^* \in \mathbb{M}_{\text{FA}}$ 이 존재한다.²⁾

1) 자연수집합 N 이 무한집합이 아니면 더하기 연산, $+$,는, 닫혀있지 않음에 주의하라.

2) 구체적인 내용은 3장의 RE와 같은 일을 하는 FA의 증명을 참조하라.

(정리) $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \neg)$ 도 대수계이다.

(정리) $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \cap)$ 은 대수계이다.

(쉬운 증명) De'Morgan의 법칙

$$\forall L_1, L_2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}, L_1 \cap L_2 = \neg(\neg L_1 \cup \neg L_2) \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}.$$

(어려운 증명) $L_1, L_2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}$ 이라면,

오토마타 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0, F_2)$ 는 각각 $L_1 = L(M_1)$,

$L_2 = L(M_2)$ 라 할 때, 새로운 오토마타 $M_{1 \times 2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_{1 \times 2}, (q_0, q_0), F_1 \times F_2)$

가 $L(M_{1 \times 2}) = L(M_1) \cap L(M_2)$ 인 오토마타임을 증명하자.

단 $\forall q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2: \forall a \in \Sigma: \delta_{1 \times 2}((q_1, q_2), a) \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ 라 하자.

i) $L(M_1) \cap L(M_2) \subseteq L(M_{1 \times 2})$ 의 증명

$$\forall x \in L(M_1) \cap L(M_2): \exists \delta_1(q_0, x) \in F_1 \wedge \exists \delta_2(q_0, x) \in F_2.$$

$$\therefore \delta_{1 \times 2}((q_0, q_0), x) = (\delta_1(q_0, x), \delta_2(q_0, x)) \in F_1 \times F_2. \quad \therefore x \in L(M_{1 \times 2}).$$

ii) $L(M_{1 \times 2}) \subseteq L(M_1) \cap L(M_2)$ 의 증명

$$\forall x \in L(M_{1 \times 2}): \exists \delta_{1 \times 2}((q_0, q_0), x) = (\delta_1(q_0, x), \delta_2(q_0, x)) \in F_1 \times F_2.$$

$$\therefore \delta_1(q_0, x) \in F_1 \wedge \delta_2(q_0, x) \in F_2. \quad \therefore x \in L(M_1) \cap L(M_2).$$

$$\text{i+ii)} \quad \forall x \in \Sigma^*: \delta_{1 \times 2}((q_0, q_0), x) = (\delta_1(q_0, x), \delta_2(q_0, x)).$$

$$\therefore L(M_{1 \times 2}) = L(M_1) \cap L(M_2).$$

i)과 ii)를 따로 증명하여야 하나, =에 symmetric한 성질을 이용하여, i+ii)로 증명해도 된다.

\times 가 순서쌍 (q_1, q_2) 에 집합이므로, 위의 표현이 맞으나, 교과서와 같이 상태 순서쌍을 대괄호와 세미콜론(;)으로 구분하여, $[q_1; q_2]$, $M_{1 \times 2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_{1 \times 2}, [q_0; q_0], F_1 \times F_2)$ 로 표현한 후 $\delta_{1 \times 2}([q_1; q_2], a) \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_1(q_1, a); \delta_2(q_2, a)]$ 로 정의하여, $\delta_{1 \times 2}([q_0; q_0], x) = [\delta_1(q_0, x); \delta_2(q_0, x)]$ 로 증명하여 함수 소괄호와 순서쌍 소괄호의 중복을 피한다.

오토마타 $M_{1 \times 2}$ 은 오토마타 M_1 과 M_2 두 개를 흉내 내므로(simulate) 곱하기(product) 오토마타라고 부른다. $L(M_1)$ 과 $L(M_2)$ 에 합집합을 받아들이는 오토마타 $M_{1|2}$, $L(M_{1|2}) = L(M_1) \cup L(M_2)$ 를 곱하기 오토마타와 상태, 상태변화함수, 초기상태는 모두 같으나 최종상태만 다르게 정의하면 된다.

$$M_{1|2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_{1 \times 2}, [q_0; q_0], F_1 | F_2)$$

$$\text{단 } \delta_{1 \times 2}([q_1; q_2], a) \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_1(q_1, a); \delta_2(q_2, a)],$$

$$F_{1|2} \stackrel{\text{def}}{=} \{[f_1; f_2] \in F_1 \times F_2 \mid f_1 \in F_1 \vee f_2 \in F_2\}.$$

(정의) n 개의 정규언어를 정의하는 오토마타 M_1, M_2, \dots, M_n 에 대하여, $\bigcup_{i=1}^n L(M_i)$ 과

$\bigcap_{i=1}^n L(M_i)$ 을 정의하는 두 개의 n -곱하기 오토마타 M_{\cup}^n 과 M_{\cap}^n 을 최종상태 F_{\cup} 과 F_{\cap} 만 다

르게 하여 아래와 같이 정의한다.

$$M_{\cup}^n = (Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n, T, \delta^n, [q_{0_1}; q_{0_2}; \dots; q_{0_n}], F_{\cup}),$$

$$M_{\cap}^n = (Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n, T, \delta^n, [q_{0_1}; q_{0_2}; \dots; q_{0_n}], F_{\cap}),$$

단 $\delta^n([q_1; q_2; \dots; q_n], a) \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_1(q_1, a); \delta_2(q_2, a); \dots; \delta_n(q_n, a)]$ 이고

$$F_{\cup} = \{[f_1; f_2; \dots; f_n \mid \bigvee_{i=1}^n (f_i \in F)\},$$

$$F_{\cap} = \{[f_1; f_2; \dots; f_n \mid \bigwedge_{i=1}^n (f_i \in F)\} \text{이다.}$$