

유한상태 오토마타(Finite State Automata¹⁾)는 Chomsky의 4가지 언어 계급에서 가장 낮은 계급인 type 3, 정규언어(regular languages)를 이해²⁾하는 기계(automata)³⁾다.

결정적 유한상태 오토마타(Deterministic Finite State Automata: **DFA**) M 은 요소 다섯 개로 이루어져 있다. 즉 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 로 쓰고,

- (1) Q 은 **상태**(state)들의 **유한 집합**이다.
- (2) Σ 는 **입력문자**(input symbol)들의 **유한 집합**(input vocabulary)이다.
- (3) δ 는 **상태변화함수**(state transition function)로서 상태집합 Q 와 입력문자 Σ 의 **순서쌍**을 정의역으로, 상태집합 Q 를 치역으로 가진다. 즉

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q \text{로 정의하고,}$$

현(current) **상태** $q \in Q$ 에서 **입력문자** $a \in \Sigma$ 를 **보고**⁴⁾ 상태가 $p \in Q$ 로 **바뀔 때**, $(\delta(q, a) = p) \in \delta$ 혹은 $\delta(q, a) = p$ 라 짧게 쓴다.

- (4) $q_0 \in Q$ 는 **처음상태**(initial state)라고 불리는 특별한(distinguished) 상태이다.
- (5) $F \subseteq Q$ 는 **끝나는 상태**(final state)라고 불리는 특별한 상태들의 집합이다.

DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 은 주어진 입력문자열 $x = a_1 a_2 \cdots a_n (\forall i: 1 \leq i \leq n: a_i \in \Sigma)$ 에 대하여 다음과 같이 동작한다.

- (A) 현 상태(current state)는 **시작상태** $q_0 \in Q$ 에서 시작하고, 현 입력문자는 입력문자열 $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ 에 가장 왼쪽 문자 a_1 에서 시작한다.
- (B) 현 상태가 $q \in Q$ 이고 현 입력문자가 입력문자열 $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ 에서 i 번째 문자 $a_i \in \Sigma$ 이었다면, **새로운** 현 상태는 상태변화함수 $\delta(q, a_i) \in Q$ 가 되고 **새로운** 현 입력문자는 a_i 다음에 있는 문자 a_{i+1} 이 된다.
- (C) 작업 (B)를 **반복적으로** 계속 수행하여 새로운 현재 입력문자가 문자열의 **오른쪽 끝** (a_n)을 넘어서면 반복 작업 (B)를 마친다.
- (D) 입력문자열 x 의 문자를 모두 보아서(오른쪽 끝까지 가서) 반복 작업이 끝났을 때, 최종상태 q 가 **끝나는 상태**($q \in F$)이면 주어진 문자열 x 는 오토마타 M 이 **받아들이는** (accept) 문자열이 되어 **true**를 return하고, 최종상태 q 가 **끝나는 상태가 아니면** ($q \notin F$) 받아들이는 문자열이 아니므로 **false**를 return한다.

1) Automata는 복수이고 단수는 automaton이다.

2) 오토마타가 언어를 이해한다는 말은 언어의 원소판별문제(membership problem)를 오토마타가 해결해준다는 뜻이다. 즉 어휘 Σ^* 에서 정의한 언어 $L \subseteq \Sigma^*$ 에 대하여, 특정 오토마타 M 이 모든(임의의) 문자열 $x \in \Sigma^*$ 에 대하여 $x \in L$ 이면 $M(x)$ 는 **true**를 $x \notin L$ 이면 $M(x)$ 는 **false**를 항상 대답하면 오토마타 M 이 언어 $L \subseteq \Sigma^*$ 를 **이해**한다고 정의하고, 언어 L 과 M 는 **같다**(equivalent)고 정의한다.

3) 기계(machine) 대신 오토마타라는 새로운 용어를 쓴 이유는 기존의 기계와는 달리 생각할 수 있는(?) 기계라는 포함한 자동기계(automatic machine)라는 뜻을 오토마타라는 용어가 포괄한다고 본 것이다.

4) 현재입력문자 $a \in \Sigma$ 는 이미 보았으므로, a 의 다음(오른쪽) 문자를 본다.

오토마타 동작을 프로그램(함수)으로 표시하면 다음과 같다.

```

function M(x: 문자열) boolean5);
variable q ∈ 상태(Q); a ∈ 기본문자(Σ); i ∈ int;
(* assume x = a[1]a[2] ... a[n] *)
  q := q0; i := 1; a := a[i]; (A)
  while i <= n do (* n ≥ 06) *) (C)
    q := δ(q, a); i := i + 1; a := a[i] (B)
  od
  if q ∈ F → return true (D)
  | q ∉ F → return false (D)
fi
(* return q ∈ F *)
    
```

상태변화함수의 확장

오토마타 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 에서 주어진 입력문자열 $x = a_1a_2 \cdots a_n (\forall i: 1 \leq i \leq n: a_i \in \Sigma)$ 에 대한 동작을 좀 더 자세히 살펴보자. 처음상태 q_0 에서 첫 번째 입력문자 a_1 을 보고 바뀐(transition) 상태를 q_1 , 다음 상태 q_1 에서 다음 문자 a_2 을 보고 바뀐 상태를 q_2 라 하면,



$$\delta(q_0, a_1) = q_1, \delta(q_1, a_2) = q_2, \dots, \delta(q_{n-1}, a_n) = q_n.$$

즉 $0 \leq \forall i < n: \delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}$ 이고 $q_0, q_1, \dots, q_n \in Q, a_1, \dots, a_n \in \Sigma$.

마지막 상태 $q_n \in F$ 이면 true를 아니면 false를 return.

이 때 중간 상태 q_1, q_2, \dots, q_{n-1} 을 제거하고 연속하여 표현하면

$$\delta(\delta(\dots \delta(\delta(q_0, a_1), a_2), \dots a_{n-1}), a_n) = q_n \in F \text{인지 아닌지를 return.}$$

이를 좀 더 확장(일반화)하여 쓰면

$$\delta^n(q_0, a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n) \in F \text{인지 아닌지를 return.}$$

$\delta^n: Q \times \Sigma^n \rightarrow Q$ 을 recursive하게 정의하면

$$\begin{aligned} \delta^0(q, \epsilon) &\stackrel{\text{def}}{=}_{\text{B}} q && \text{단 } q \in Q, \\ \delta^n(q, xa) &\stackrel{\text{def}}{=}_{\text{R}} \delta(\delta^{n-1}(q, x), a) && \text{단 } q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma. \end{aligned}$$

우리는 임의의 자연수 $n \geq 0$ 에 대하여

5) **boolean** = {true, false}이다.

6) $n = 0$ 이면 $x = \epsilon$ 이라고 하자.

7) δ 의 두 번째 파라미터가 Σ 에서 Σ^n 으로 확장되는 δ^n 의 정의에서 $\stackrel{\text{def}}{=}_{\text{B}}$ 는 ϵ 으로, $\stackrel{\text{def}}{=}_{\text{R}}$ 는 $xa \in \Sigma^+$ 으로 서로 소(disjoint)임에 주의하라.

$\delta^n: Q \times \Sigma^n \rightarrow Q$ 를 정의하였다. 이를 Σ^n 을 Σ^* 로 확장할 때와 같이

$$\delta^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \delta^i \text{로 정의하면}$$

$\delta^*: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ 으로 확장하여 정의할 수 있다.

$$\delta^0(q, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} q \quad \text{단 } q \in Q,$$

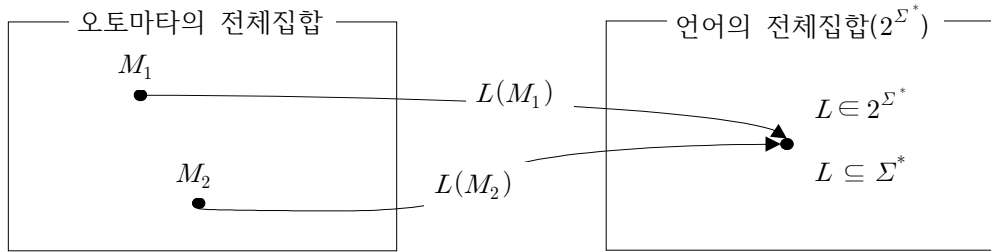
$$\delta^*(q, xa) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\delta^*(q, x), a) \quad \text{단 } q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma.$$

(정의) DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 이 받아들이는 언어(문자열들의 집합)

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) \in F\}$$

을 정의한다. 이 때 언어 $L(M)$ 을 오토마타 M 이 정의하는 언어라고도 한다.

(정의) 두 개의 오토마타 M_1 과 M_2 가 가 정의하는 언어가 같으면, 즉 $L(M_1) = L(M_2)$ 이면, $M_1 = M_2$ 라 쓰고, M_1 과 M_2 는 같은 일을 하는(equivalent; 같은) 오토마타 부른다.

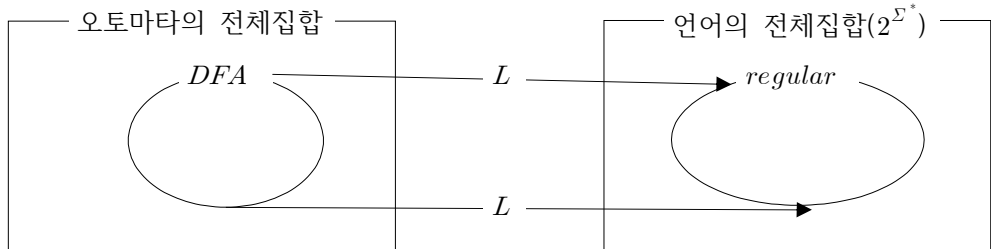


같은 언어 $L \subseteq \Sigma^*$ 을 정의하는(같은 일을 하는 그러나) 서로 다른 DFA M 은 여러 개이다. 그러나 그 중 대표 오토마타는 상태 수 $|Q|$ 가 가장 작은(Minimal DFA) 하나⁹⁾로 4장에서 정의할 것이다.

Regular 언어와 regular 언어 클래스의 정의

(정의) 임의의 언어 $L \subseteq \Sigma^*$ 을 정의하는 DFA M 이 존재한다면, $L = L(M)$, 그 언어 L 은 **regular 언어**라고 부른다.

(정의) Regular 언어들의 집합을 **regular 언어 클래스**라 정의하고 이를 **type 3(계급) 언어 클래스**라고도 부른다.



8) 교과서에서는 $\hat{\delta}$ 을 사용하나 강의노트에서는 δ^* 로 쓴다.
 9) 상태 이름만 바뀌면 다른 DFA이지만 구조적으로는 같은(structurally isomorphic) DFA는 같다는 관점에서 대표 오토마타는 하나이다.

언어 클래스¹⁰⁾는 주목해야할 개념이다. 앞으로 더 높은¹¹⁾ 언어 클래스들과 오토마타 클래스, 문법 클래스, 함수 클래스, 프로그램 클래스 등등 간의 같음(equivalent: 같은 일을 하는)이라는 개념이 등장할 것이다.

10) 언어 클래스는 언어들의 집합인데, 언어도 집합(문자열들의 집합)이므로 집합(언어)의 집합이라는 말 보다는 집합(언어) 클래스라는 말을 더 즐겨 쓴다.

11) Type 3에 상위 클래스로 type 2인 문맥자유(context free), type 1인 끝나는(recursive), type 0인 프로그램 할 수 있는 (recursively enumerable)이 있으며, type 1의 하위 클래스로 NP-complete (intractable)와 polynomial(tractable)이 있다.