

Recursion은 자연수와 관련된 **무한한 집합** 또는 구조를 **유한하게 정의**하거나 **증명**하는데 사용되는 매우 중요한(사실은 **유일한**) 방법(**infinite wisdom**)이다.

이는 **무한한 자연수**를 정의함으로서 시작된다¹⁾. (1)

Basis 0은 자연수이다.

Recursion 어떤 수가 **자연수**이면 그것보다 하나 더 큰 수도 **자연수**이다.

자연수를 정의하는 위의 구조는 아주 전형적인 recursion의 구조를 가지고 있으며 이를 아래와 같이 **수학기호**를 이용하여 정의할 수 있다.

자연수집합 N 을 수학기호를 이용하여 아래와 같이 정의된다.

Basis $0 \in N$.

Recursion *If* $n \in N$, *then* $n++ \in N$ ²⁾.

Recursion' $n \in N \Rightarrow n++ \in N$.

이 정의는 (1) 자연수의 **시작**인 0(중학교에서는 그 시작이 1이었다³⁾)이 **자연수**임을 기술하는 **basis**와 (2) n 이 **자연수 일 때** 그 **다음 수** $n+1$ 이 **자연수**임을 기술하는 **recursion**의 두 개의 구조로 이루어져 있다. 특히 **recursion**은 1) 가정이 사실이면 결론도 사실이다(가정 \Rightarrow 결론)라는 전형적인 연역(deduction)구조인 implication(\Rightarrow)를 가지면서, 2) **가정에** 정의하고자 하는 **자연수집합** N 이 들어있다는 연역적(deduction)인 사고가 아닌 **비연역적**(non-deductive; recursive) 구조를 가지고 있다. 그래서 이를 **recursive** 정의하고 부른다.

이를 좀 더 **일반화**하여 보자.

집합 S 는 다음과 같이 정의된다. (2)

Basis $\exists k \geq 1: s_1, s_2, \dots, s_k \in S$.

Recursion ($\exists n \geq 1: x_1, x_2, \dots, x_n \in S$) $\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S)$.

이 때 함수 f 가 중요하며, 자연수의 경우 n 은 1이고 함수 f 는 다음 수이다.

교과서 예제 1.19 **뿌리 깊은 나무**⁴⁾(rooted-tree)의 정의

Basis 노드 하나만 있는 것도 그 노드를 뿌리로 하는 **뿌리 깊은 나무**이다.

Recursion T_1, T_2, \dots, T_n 이 **뿌리 깊은 나무**라고 하자. 새로운 노드 r 에서 각 **뿌리 깊은 나무** T_1, T_2, \dots, T_n 의 뿌리 r_1, r_2, \dots, r_n 로 가는 edge를 연결하면 노드 r 을 뿌리로 하는 새로운 **뿌리 깊은 나무**가 정의된다.

1) Peano axiom

2) $n++ = n+1$ 이며, Peano의 axiom에서는 아직 $+$ 연산이 정의되지 않아 다음 수 $++$ 를 사용하였다.

3) 셀 수 있는 무한(countably infinite) 집합 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 과 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 은 서로 동등(\cong ; isomorphism)하므로, 두 가지 정의가 모두 옳다.

4) Rooted tree를 뿌리 깊은 나무로 번역한 것이 조금 어색할 수도 있으나, 세종대왕에 한글창제 큰 뜻을 기리는 글씨에 해학(諧謔)으로 이해해주시기 바란다.

위의 정의를 좀 더 수학적으로 세련된 표현으로 정의해 보자. 그 이전에 **뿌리 깊은 나무**라는 **틀**을 미리 정의하는 것이 수학적으로 더 세련된 방법이다.

뿌리 깊은 나무 $T = (V, E, r)$

- i) V 는 노드의 집합,
- ii) E 는 에지의 집합, 단 $(u, v) \in E$ 는 노드 $u \in V$ 에서 노드 $v \in V$ 로 가는 에지다.
- iii) 특별한 노드 $r \in V$ 은 뿌리다.

Basis $(\{v\}, \emptyset, v)$ 는 뿌리 깊은 나무다.

Recursion 자연수 $n(n \geq 1)$ 에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1), T_2 = (V_2, E_2, r_2), \dots, T_n = (V_n, E_n, r_n)$ 이 뿌리 깊은 나무라고 하면, 새로운 노드 $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ 을 더하여, $T = (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n \cup \{r\}, E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \{(r, r_1), (r, r_2), \dots, (r, r_n)\}, r)$ 가 새로운 뿌리 깊은 나무이다.

Recursion' 자연수 $n(n \geq 1)$ 에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1), T_2 = (V_2, E_2, r_2), \dots, T_n = (V_n, E_n, r_n)$ 이 뿌리 깊은 나무라고 하면, 새로운 뿌리 깊은 나무 $T = (V, E, r)$ 는 아래로 정의한다.

- i) $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n \cup \{r\}$,
- ii) $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \{(r, r_1), (r, r_2), \dots, (r, r_n)\}$,
- iii) $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$.

교과서 예제 1.20의 식의 정의

Basis 수와 문자는 식이다.

Recursion 식 + 식, 식 - 식, 식 \times 식, 식 \div 식, (식)⁵은 식이다.

Recursive 정의의 유한성과 무한성

유한한 Recursive 정의로 **무한집합**을 정의할 수 있다.⁶⁾

Recursive하게 정의된 무한집합이 만족하는 성질의 증명

가정 집합 S 가 식(2)에 의하여 정의된 집합이다.

결론 $\forall x \in S, p(x)$.

증명 Basis $p(s_1), p(s_2), \dots, p(s_k), k \geq 1$ 을 증명한다.

Recursion $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), n \geq 1 \Rightarrow p(f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ 을 증명한다.

(정의) $|A| = |B| \iff A \cong B$.

두 집합이 동등할 때(\cong) 두 집합이 **크기(cardinality)**가 같다고 정의한다.

무한집합의 동등

5) 결론에 식을 바로 씌우므로 recursive 가정(...이 식이면)이 생략되었음에 주의하라.

6) Recursive 정의는 사실 무한한 집합을 유한하게 정의하는 유일한 방법이다. 이를 유한한 recursive 정의의 **무한한 지혜(infinite wisdom)**라고 부르기도 한다.

- (예 1) 0부터 시작하는 자연수 집합 $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 과 1부터 시작하는 자연수 집합 $N_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ 을 생각하자. $N_1 \subset N_0$ 이지만 $N_1 \cong N_0$ ⁷⁾이다.
- (예 2) 자연수 집합 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 과 짝수 집합 $E = \{0, 2, 4, \dots\}$ 을 생각하자. $E \subset N$ 이지만 $E \cong N$ 이다.
- (예 3) 자연수 집합 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 과 자연수의 순서쌍 집합 $N \times N = \{(i, j) | i, j \in N\}$ 을 생각하자. $N \cong N \times N$ ⁸⁾이다.

(정의) 자연수의 부분집합과 동등한 집합을 셀 수 있는(countable) 집합이라 정의하고, 그렇지 않으면 셀 수 없는(uncountable) 집합 이라고 정의한다.

(사실) 셀 수 있는 집합은 (셀 수 있는)유한집합과 셀 수 있는 무한집합 두 가지 종류가 있다.

(정리) 모든 셀 수 있는 (무한)집합은 자연수에 부분집합과 동등하다.

(사실) 모든 셀 수 있는 (무한)집합은 자연수로 번호 매길 수(enumerable⁹⁾) 있다.

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$$

(의문) 셀 수 없는 무한집합이 있는가?

(정리) 자연수의 부분집합의 집합(멱집합; Power set)이 셀 수 없는 무한이다.

(사실) 자연수의 멱집합은 무한이진수(infinite binary string) 집합과 동등하다.

(가정) 집합 $F = 2^N \cong \{f | f: N \rightarrow \{0,1\}\}$ ¹⁰⁾은

(결론) 셀 수 없는 무한이다.

(증명) Cantor에 대각선화 주장(Cantor's diagonal argument, 1812)¹¹⁾

집합 F 가 셀 수 있는 무한이라고 가정하자.

그러면 집합 F 의 원소 들은 자연수도 번호 매길 수 있을 것이다.

$$F = \{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$$

$$f_0 = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, \dots), \forall i \in N, f_0(i) = a_{0i} \in \{0, 1\} \leftrightarrow \{i \in N | f_0(i) = a_{0i} = 1\}.$$

$$f_1 = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots), \forall i \in N, f_1(i) = a_{1i} \in \{0, 1\} \leftrightarrow \{i \in N | f_1(i) = a_{1i} = 1\}.$$

...

$$f_n = (a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{nn}, \dots), \forall i \in N, f_n(i) = a_{ni} \in \{0, 1\} \leftrightarrow \{i \in N | f_n(i) = a_{ni} = 1\}.$$

...

여기서 대각선화(diagonalization) 함수 $f = (a_{00}, a_{11}, \dots, a_{nn}, \dots)$ 와 그것의 부정 \bar{f} 를 생각하자.

7) 중학교에서는 1부터 자연수를 대학교에서는 0부터 자연수를 정의해도 되는 이유이다.

8) 이 때 짝짓기 함수 f 는 무엇인가? $N \subset N \times N$ 인가? $|N| < |N \times N|$ 인가? $|N| = |N \times N|$ 인가?

9) RE(Recursively Enumerable)이라고 정의하며, 8장 Turing Machine에서 배운다.

10) 고등학교 때 배운 무한수열 $\{a_n\}$ 은 자연수 N 을 정의역으로, 실수 R 을 치역으로 하는 함수이다. 즉 $a: N \rightarrow R$ 이다.

11) Cantor에 대각선화 증명법으로 무리수 $\sqrt{2}$ 나 π 를 포함하는 실수 R 이 셀 수 없는 무한임을 증명할 수 있게 됐다.

$\bar{f} = (\overline{a_{00}}, \overline{a_{11}}, \dots, \overline{a_{nn}} \dots)$, 단 $\forall i \in N, \overline{a_{ii}} = 0$, if $a_{ii} = 1$; $\overline{a_{ii}} = 1$, if $a_{ii} = 0$.
 $\forall i \in N, \bar{f} \neq f_i$ 이어서 $\bar{f} \notin F$ 이지만, \bar{f} 는 집합 F 의 원래 정의에 맞는 함수 이므로 $\bar{f} \in F$ 이어야 한다.

따라서 집합 F 가 셀 수 있는 무한이라는 증명 초기의 가정이 거짓이다.

따라서 집합 F 는 셀 수 있는 무한이 아니다. 즉 집합 F 는 셀 수 없는 무한이다.

집합 크기(cardinality)의 종류

셀 수 있는(countable)

유한(finite)

셀 수 있는 무한(countably infinite)

셀 수 없는(uncountable)

셀 수 없는 무한(uncountably infinite)