

Midterm Fall 2014

2014년 10월 10월 21일 화요일 오후 1:00 – 2:30
전산학동 E3-1 1501 호 (제 1 공동 강의실)

Prof. Choe, Kwang-Moo

Student ID:

Name:

Grading Result:

Problem				Total
1	/10			/10
2	/10	/10	/10	/30
3	/5	/10		/15
4	/10	/15	/15	/40
5	/10		/10	/20
6	/10		/5	/15
7	/10			/10
Grade				/140

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

1. 이산수학 복습 (Review of discrete mathematics) (10 점)

기본문자(vocabulary) Σ 에서 정의된 문자열(string) 전체의 집합 Σ^* 가 countably infinite임을 증명하시오.

[정답]

Chapter 1-2 TP 18p 를 보고 bijective 함수 만들어냄

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

2. Regular Language 의 이해 (총 30 점)

아래 언어 L 이 regular language 인지 아닌지를 판별하고, regular 인 경우, DFA 나 regular expression 을 제시하고, regular language 가 아닌 경우, pumping lemma 를 이용하여 증명하시오.

2-1. $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i + k = j\}$ (10 점)

[정답]

DFA 로 표현할 수 없다. Pumping lemma 로 증명

Suppose L can be accepted by an FA, and let n be the integer in the statement of the pumping lemma. Let $x = a^i b^j c^k$, $i+k=j$. Then $x \in L$

$n \geq 0$, $\exists w \in L$ such that $|w| \geq n$

$w = a^n b^n c^n$, 라 하자.

x, y, z such that $w = xyz$, $|xy| \leq n$,

$y = a^i$, $1 \leq i \leq n$

그런데,

$xy^2z = a^{n+i} b^n c^n \notin L$

따라서, pumping lemma 에 의해 L 은 regular language 가 아니다.

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

2-2. $L = \{w \in a^* \mid |w| \text{ is a Fibonacci number.}\}$ (10 점)

[정답]

Regular 아님.

Given number n , find i that is the first Fibonacci number larger than n . And find a Fibonacci number m that is larger than $4i$.

Then, the difference between m and the next fibonacci number m' is larger than $2n$.

Therefore, the interval (m, m') contains at least one $x + y^*k + z$ for some k where $x + y + z = i$ and $x + y \leq n$ and $y \neq 0$.

Thus, L is not a regular language.

2-3. $L = \{a^{2i}b^{3j} \mid i \geq 0, j \geq 0\}$ (10 점)

[정답]

$(aa)^*(bbb)^*$

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

3. Regular Expression 의 이해 (총 15 점)

$\Sigma = \{0, 1\}$ 일 때, 두 개의 regular expression 이 같은 언어를 나타냄(denote)은 m-DFA 가 같음(isomorphism)을 보여 증명할 수 있다.

이를 이용하여, 아래의 두 개의 regular expression 이 같음을, m-DFA 를 그려 증명하시오.

(참고) RE 를 ϵ -NFA 로 고칠 때, 가능한 한 state 와 ϵ -move 의 수를 줄이시오.

3-1. $(0^*1)^*0^*$ 와 $(0 + 1)^*$ (5 점)

[정답]

$$(0^*1)^*0^* \rightarrow (0 + 1)^*$$

문자열을 right to left 방식으로 읽는다고 생각하자. ϵ 의 경우: 자명

길이가 1 이상인 문자열에 대해 postfix 가 0 이라면 1 이 나오기 전까지 0^* 로 표현가능하다.

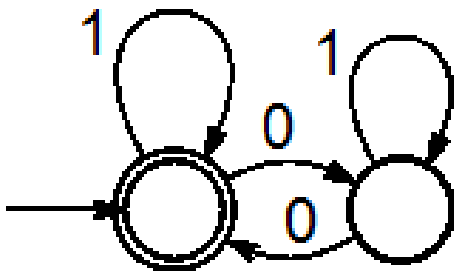
그 다음 문자가 1 이 오면 다음 1 을 만날 때 까지 0^*1 로 표현가능하다. 이 과정을

recursive 하게 하면 모든 문자열을 $(0^*1)^*0^*$ 로 나타낼 수 있다.



3-2. $1^+(1^*01^*01^*)^*$ 와 $(01^*0+1)^*$ (10 점)

[정답] $0=a, 1=b$



페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

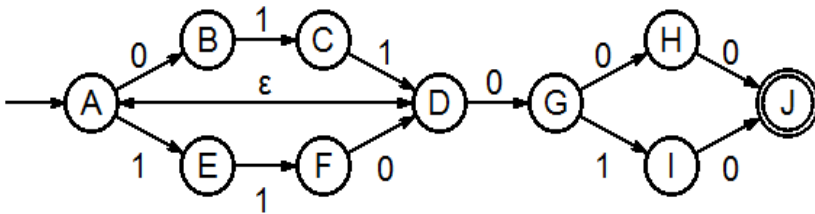
4. Minimal state DFA 의 이해 (총 40 점)

4-1. $\Sigma = \{0, 1\}$ 일 때, $(011 + 110)^*(000 + 010)$ 로 정의된 언어(language) L 에 대하여 minimal state DFA 를 그려라. (Hint: RE \rightarrow ϵ -NFA \rightarrow DFA \rightarrow m-DFA).

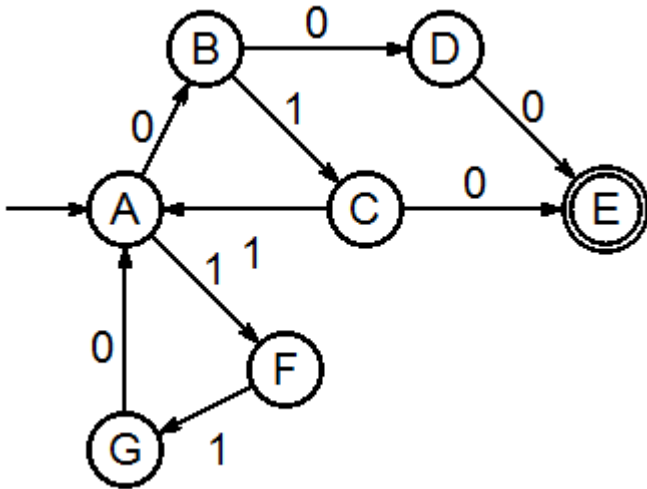
(참고) RE 를 ϵ -NFA 로 고칠 때, 가능한 한 state 와 ϵ -move 의 수를 줄이시오. 또한 dead state 는 나타내지 마시오. (10 점)

[정답]

ϵ -NFA



DFA(minimal)



위의 DFA 는 minimal 이다. 왜냐하면 모든 state p, q 에 대해 $p \neq q$ 이기 때문이다. (표 참조)

State / input	0	1
q0:{A,D}	{B,G}	{E}
q1:{B,G}	{H}	{C,I}
q2:{E}	empty	{F}
q3:{H}	{J}	Empty
q4:{C,I}	{J}	{A,D}
q5:{F}	{A,D}	Empty
q6:{J}	empty	empty

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

4-2. DFA = (Q, Σ, δ, q₀, F)에 대하여 다음과 같은 관계(relation) ≡를 정의한다.

$$\equiv = \{(p, q) \in Q \times Q \mid \forall w \in \Sigma^*, \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F\}$$

관계 ≡는 equivalent relation 이며, equivalent class $[q]_{\equiv}$ 는 정규식(regular expression)으로 표현 가능하다. 어떤 상태 q 에 대하여 $[q]_{\equiv}$ 를 정규식으로 나타내는 방법은 final state 를 q 라 두고, final state 를 바꾼 DFA 가 받아들이는 언어를 연립정규방정식을 푸는 방법(교과서 TP Chapter 4, 23-24p)으로 구하면 된다. (15 점)

- (1) 4-1 의 DFA 에 대하여 각 equivalent class $[q]_{\equiv}$ 을 구하기 위한 연립정규방정식을 쓰시오. state 가 ∅인 경우, 나타내지 마시오. (5 점)
- (2) 위 연립정규방정식을 사용하여 모든 equivalent class $[q]_{\equiv}$ 을 정규식으로 나타내어라. (10 점)

[정답]

(1) [A]:

$$A = 0B + 1F + e$$

$$B = 1C$$

$$C = 1A$$

$$F = 1G$$

$$G = 0A$$

[B]:

$$A = 0B + 1F$$

$$B = 1C + e$$

$$C = 1A$$

$$F = 1G$$

$$G = 0A$$

[C]:

$$A = 0B + 1F$$

$$B = 1C$$

$$C = 1A + e$$

$$F = 1G$$

$$G = 0A$$

[D]:

$$A = 0B + 1F$$

$$B = 0D + 1C$$

$$C = 1A$$

$$D = e$$

$$F = 1G$$

$$G = 0A$$

[F]:

$$A = 0B + 1F$$

$$B = 1C$$

$$C = 1A$$

$$F = 1G + e$$

$$G = 0A$$

[G]:

$$A = 0B + 1F$$

$$B = 1C$$

$$C = 1A$$

$$F = 1G$$

$$G = 0A + e$$

[E]:

$$A = 0B + 1F$$

$$B = 0D + 1C$$

$$C = 0E + 1A$$

$$D = 0E$$

$$E = e$$

$$F = 1G$$

$$G = 0A$$

(2)

$$[A] = (011+110)^*$$

$$[B] = (011+110)^*0$$

$$[C] = (011+110)^*01$$

$$[D] = (011+110)^*00$$

$$[E] = (011+110)^*(000+010)$$

$$[F] = (011+110)^*1$$

$$[G] = (011+110)^*11$$

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

4-3. 다음은 어떤 DFA 를 연립정규방정식으로 나타낸 것이다.

$$A = 0B + 1A$$

$$B = 0B + 1C$$

$$C = 0B + 1D$$

$$D = 0B + 1A + \epsilon$$

시작 상태(initial state)를 A 라고 할 때, $[A]_{\equiv} = \epsilon + 1 + 11 + (0 + 1)^*111$ 가 됨을 보여라.

(15 점)

[정답]

$[A]_{\equiv}$ 를 구하기 위해 상태 A 를 final state 라 둔다. 그러면 연립방정식이 다음과 같이 바뀐다.

$$A=0B+1A+\epsilon$$

$$B=0B+1C$$

$$C=0B+1D$$

$$D=0B+1A$$

에서 $A=D + \epsilon$ 이다. 이것을 $D=0B+1A$ 에 대입하면 $D=0B+1D+1=C+1$ 이 된다. 이를 $C=0B+1D$ 에 대입하면 $C=0B+1C+11$ 이고 따라서 $C=B+11$ 이 된다. $D=C+1$ 에 넣으면 $D=B+11+1$ 이 되고 $A=D + \epsilon$ 에 의해 $A= B+11+1+\epsilon$ 이다.

식 $B=0B+1C$ 에서 $B = 0^*1C$ 이고, 이를 $C=B+11$ 에 대입하면 $C= 0^*1C+11$ 이 된다. 이 식을 다시 $B = 0^*1C$ 에 넣게 되면

$$B = 0^*1(0^*1)^*11 = (0^*1)^* 0^*111.$$

따라서 $A= B+11+1+\epsilon = (0^*1)^* 0^*111 + 11+1+\epsilon$ 이다.

여기서 $(0^*1)^* 0^* = (0+1)^*$ 이므로

$$A= (0^*1)^* 0^*111 + 11+1+\epsilon = (0+1)^* 111 + 11+1+\epsilon.$$

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

5. Context Free Grammar(CFG)의 이해와 표현 (총 20 점)

5-1. 다음 언어의 CFG 를 쓰고, 각 non-terminal symbol(비말단기호)들은 각각 어떤 문자열을 만들어내는지 설명하시오. (10 점)

$$L = \{w \in (a,b)^* \mid \#_b(w) = 2 \times \#_a(w)\}$$

$\#_a$: The number of a words
 $\#_b$: The number of b words

[답안]

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aBB \mid bA_1$$

$$A_1 \rightarrow aB \mid BA_2$$

$$A_2 \rightarrow aS \mid bA_1A_2 \mid bA_2A_1$$

$$B \rightarrow bS \mid aBBB$$

→ A1: b 의 개수가 a 의 개수의 2 배보다 하나 적은 문자열

→ A2: b 의 개수가 a 의 개수의 2 배보다 2 개 적은 문자열

→ B: b 의 개수가 a 의 개수의 2 배보다 하나 많은 문자열

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
-------------------	--	-------------	--

5-2. 5-1 에서 쓴 CFG 를 이용하여, 다음 언어의 CFG 를 쓰시오. (10 점)

$$L = \{w \in (a,b)^* \mid \#_a(w) = k \times \#_b(w)\}$$

$\#_a$: The number of a words
 $\#_b$: The number of b words
 k : $k > 0$, natural numbers

[답안]

5-1 에서 a 와 b 개수 바뀜

$$G = (V, \{a,b\}, S, P)$$

$$V = \{S, A, B_1, B_2, B_3, \dots, B_k\}$$

$$P = S \rightarrow \epsilon \mid bA^k \mid aB_1$$

$$A \rightarrow aS \mid bA^{n+1}$$

$$B_1 \rightarrow bA^{k-1} \mid aB_2$$

...

$$B_i \rightarrow bA^{k-i} \mid aB_{i+1}$$

...

$$B_{k-1} \rightarrow bA^{k-(k-1)} \mid aB_k$$

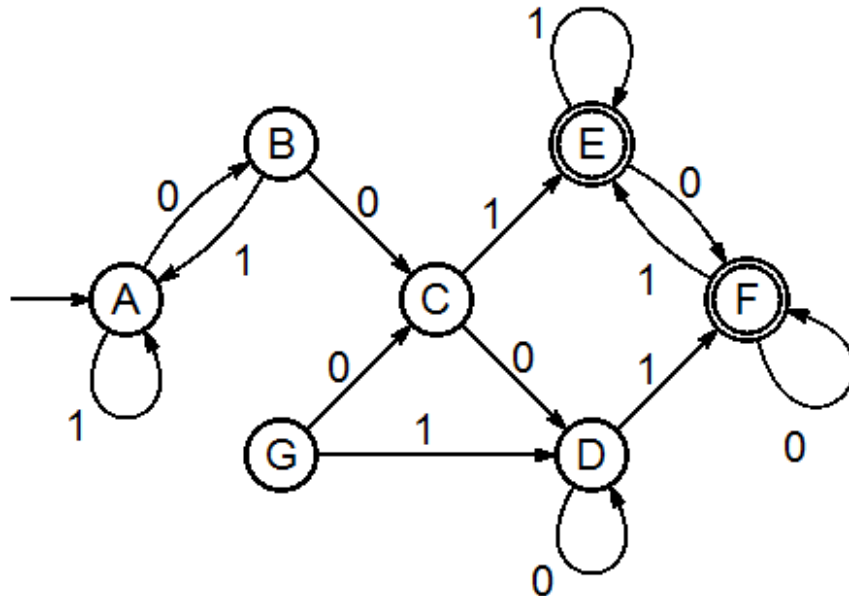
$$B_k \rightarrow bA^{k-1} \mid aB_kB_1 \mid aB_{k-1}B_2 \mid \dots \mid aB_2B_{k-1} \mid aB_1B_k$$

페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

6. DFA 와 table filling algorithm 의 이해

다음과 같이 DFA D 가 주어져 있다. 각 질문에 답하여라. (총 15 점)



6-1. DFA D 에 대해 table filling algorithm 을 실행할 때, 각 iteration 에 따른 table 의 변화를 나타낸 것이다. Iteration 마다 변한 table 을 완성하여라. Iteration 은 table 의 위에서부터 가로를 다 확인한 다음에 아래로 진행한다. (단, 두 state 가 distinguishable 이면 table 에 d 로 표현한다.) (10 점)

(참고) 교과서 TP Chapter 4, 20p

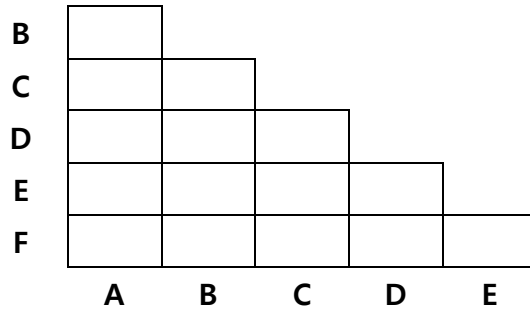
Basis:

B					
C					
D					
E					
F					
	A	B	C	D	E

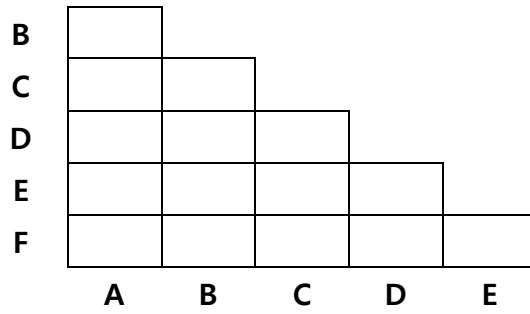
페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

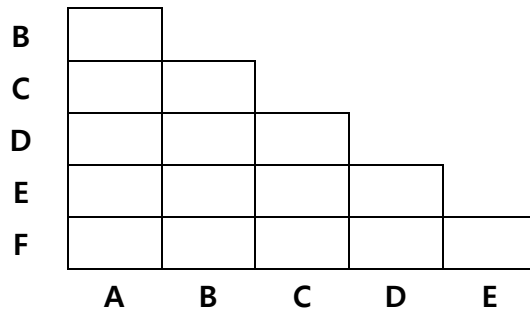
change : 1



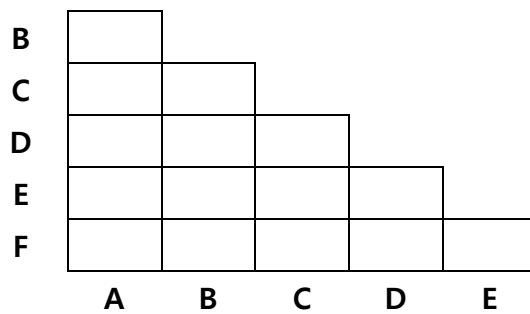
change : 2



change : 3



change : 4



change : 5

B					
C					
D					
E					
F					
	A	B	C	D	E

6-2. 6-1)의 table 을 참고하여 DFA D 의 minimal state DFA 를 그려라. (5 점)

[정답]

6-1)

Basis:

B					
C					
D					
E	d	d	d	d	
F	d	d	d	d	
	A	B	C	D	E

Iter : 1

B					
C	d				
D					
E	d	d	d	d	
F	d	d	d	d	
	A	B	C	D	E

Iter : 2

B					
C	d	d			
D					
E	d	d	d	d	
F	d	d	d	d	
	A	B	C	D	E

Iter : 3

	A	B	C	D	E
B					
C	d	d			
D	d				
E	d	d	d	d	
F	d	d	d	d	

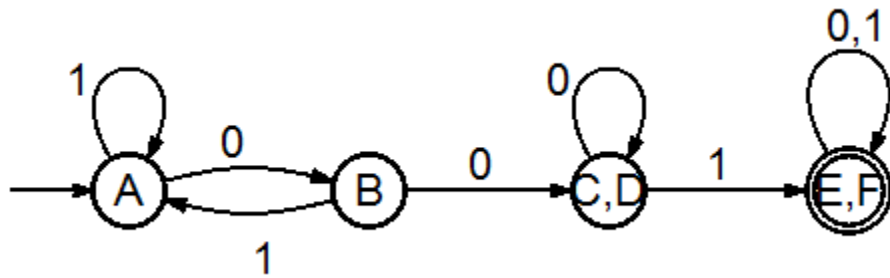
Iter : 4

B					
C	d	d			
D	d	d			
E	d	d	d	d	
F	d	d	d	d	

Iter : 5

B	d				
C	d	d			
D	d	d			
E	d	d	d	d	
F	d	d	d	d	

6-2)



페이지마다 학번과 이름을 적어주세요.

Student ID		Name	
------------	--	------	--

7. Mealy Machine 과 일반 DFA 의 이해

다음 Mealy Machine 의 입력 문자열이 "1+2*2="일 때, 그 출력 값을 구하시오. (5 점)

$$M_e = (Q, \Sigma, \Pi, \delta, \lambda, q_0)$$

$$Q = \{s, n, o, f\}, \Sigma = \{1, 2, 3, 4, +, *=\}$$

$$\Pi = \{push1, push2, push+, push *, calc, print\} \quad (p \in \Pi \text{는 프로그램 블록 또는 함수})$$

$$\delta = \{\delta(s, 1) = n, \delta(s, 2) = n, \delta(n, +) = o, \delta(n, *) = o, \delta(o, 1) = n, \delta(o, 2) = n, \delta(n, =) = f\}$$

$$\lambda = \{\lambda(s, 1) = push1, \lambda(s, 2) = push2,$$

$$\lambda(n, +) = push+, \lambda(n, *) = push *,$$

$$\lambda(o, 1) = calc, \lambda(o, 2) = calc,$$

$$\lambda(n, =) = print\}$$

$$q_0 = s$$

프로그램 블록(함수) 설명 (괄호 안은 Stack 을 아는 분을 위한 설명입니다.):

전역변수 S : 빈 list(array)(ordered set)로 초기화됨 (S = 빈 Stack)

$1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, 2 + 2 = 4, 1 + 2 = 3, 1 + 4 = 5$

$1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 2 \times 1 = 2, 2 \times 2 = 4, 3 \times 2 = 6$

push1: S 의 위(top)에 1 를 추가, $S.push(1)$

push2: S 의 위에 2 를 추가, $S.push(2)$

push +: S 의 위에 +을 추가, $S.push(+)$

*push **: S 의 위에 *을 추가, $S.push(*)$

calc: $v_1 \in \{1, 2, 3, 4\}, v_1 = S.pop()$

$op \in \{+, *\}, op = S.pop()$

$v_2 \in \{1, 2, 3, 4\}, v_2 = S.pop()$

if $op = +$ *then* $push(v_1 \times v_2)$ & *if* $op = *$ *then* $push(v_1 + v_2)$

print: S 의 제일 끝 원소를 출력 ($print S.pop()$)

[정답]

4