

## Homework #9 Solution

1

a.

만약  $L$ 이 context free language라고 가정하고,  $z = a^n b^n c^n$ 으로 두자.

그러면  $z = uvwxy$  이고,

Case1) 만약  $vx$ 가 최소 1개의  $a$ 를 가지고 있다면 이는  $c$ 를 포함하지 않게 되고,  $uv^2wx^2y$  는  $a$ 의 개수는  $n$ 보다 커지게 되고  $c$ 의 개수는  $n$ 이 되기 때문에  $L$ 이 될 수 없다.

Case2) 만약  $vx$ 가  $a$ 를 포함하지 않는다면 이는  $b$ 나  $c$ 를 포함하고 있게 되고,  $uv^0wx^0y$  는  $a$ 의 개수는  $n$ 이 되지만  $b$  나  $c$ 의 개수는  $n$ 보다 작게 되기 때문에  $L$ 이 될 수 없다

두 가지 경우 중 어느 경우에도 contradiction이 있기 때문에  $L$ 은 CFL이 될 수 없다.

b.

만약  $L$ 이 context free language라고 가정하고,  $z = a^{2^n}$ 으로 두자.

그러면  $z = uvwxy$  이고,

Pumping lemma에 의해서  $uv^2wx^2y \in L$  이 되어야 한다. 하지만  $|wxy| \leq n$  이 되어야 하는데, 이는  $2^n < |uv^2wx^2y| \leq 2^n + n < 2^{n+1}$ 을 의미 하기 때문에  $uv^2wx^2y$ 는  $L$ 이 될 수 없게 된다. 그러므로 이는 contradiction이기 때문에  $L$ 은 CFL이 될 수 없다.

2.

1. The algorithm in Section 7.1.2 finds only the generating symbols.

Basis:  $\forall a \in T, a$  is generating.

Induction: Suppose  $A \rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_n$ , and  $\forall i, \alpha_i \xRightarrow{*} w_i$  by induction hypothesis. Then  $A \xRightarrow{*} w_1 \dots w_n$ . Hence  $A$  is also generating.  $\square$

2. (a) The algorithm in Section 7.1.2 finds all reachable symbols of  $G$

Suppose  $X$  is a reachable symbol, say  $S \xRightarrow{*} \alpha X \beta$

Basis: Zero steps.  $X$  is  $S$  and surely reachable.

Induction: If the derivation takes  $n$  steps for  $n > 0$ , we can find a production  $A \rightarrow \alpha_1 X \beta_1$  such that  $S \xRightarrow{*} \alpha_2 A \beta_2$  by the inductive part of the algorithm. Thus  $S \xRightarrow{*} \alpha_2 \alpha_1 X \beta_1 \beta_2$  and  $X$  is reachable by definition of reachable.  $\square$

(b) The algorithm in Section 7.1.2 finds only reachable symbols of  $G$

Basis:  $S$  is surely reachable.

Induction: Suppose  $A$  is known to be reachable by induction hypothesis and  $A \rightarrow \alpha_1 X_1 \dots X_n \alpha_n$ . Then  $\forall i, X_i$  is reachable by definition of reachable.  $\square$