CS322 Sol #1

채점 : 이창재
mettugi@kaist.ac.kr

1.

(1) $\forall a \in A,\ (a,a) \in R$ (R is reflexive)

$\therefore\ a \in \{b \in A \mid (a,b) \in R\} = [a]_R$

3 pts.

R이 reflexive 함을 이용하면 맞다고 하였습니다.

(2) $([a]_R = [b]_R) \Leftrightarrow (\underbrace{[a]_R \subseteq [b]_R \text{ and } [b]_R \subseteq [a]_R}_{\text{i)}})$

i) $\forall c\ (c \in A \text{ and } \overbrace{c \in [a]_R}^{\text{or } (a,c) \in R})$

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ ($\underbrace{\text{R is symmetric}}_{\text{ii)}}$)

$(b,a) \in R$ and $(a,c) \in R \Rightarrow (b,c) \in R$ ($\underbrace{\text{R is transitive}}_{\text{ii)}}$)

$\therefore \forall c \in [a]_R\quad c \in [b]_R$

therefore $[a]_R \boxed{\subseteq} [b]_R$

ii) Similar way, $[b]_R \subseteq [a]_R$

So $(a,b) \in R \Rightarrow [a]_R = [b]_R$

3 pts.

i) 두 set이 같을 조건 제시
ii) R의 성질을 이용.
해서 증명이 문제 없었으면 만점 드렸습니다.

* proper subset (⊂) 쓴 경우 0.5점 감점.

(3) $\big(((a,b)\notin R) \Rightarrow ([a]_R \cap [b]_R = \emptyset)\big) \Leftrightarrow \big(([a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset) \Rightarrow ((a,b) \in R)\big)$

(contraposition(대우))

$([a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset) \Rightarrow \exists c$ such that $(a,c) \in R$ and $(b,c) \in R$ (obviously $c \in A$)

$((a,c) \in R) \Rightarrow ((c,a) \in R)$ (R is symmetric)

$((b,c) \in R$ and $(c,a) \in R) \Rightarrow ((b,a) \in R)$ (R is transitive)

$\Rightarrow ((a,b) \in R)$ (R is symmetric)

Therefore $(a,b) \in R$

4 pts.
contrapositive proposition 증명하거나
proof by contradiction이나 논리적 비약 없으면
만점 드렸습니다.

(4) $P_R = \{[a]_R \subseteq A \mid a \in A\}$ is a partition (exhaustive, disjoint)

From (1), $\forall a \in A : a \in [a]_R$ (exhaustive)

From (2) and (3) : If $[a]_R \neq [b]_R$ $((a,b) \notin R)$ then $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ (disjoint)

$\therefore P_R$ is a partition.

4 pts.
exhaustive, disjoint 증명해서 증명시
만점 드렸습니다.

2. $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

group

$$= \{ \begin{array}{llll} (0,0), & (0,1), & (0,2), & \cdots \\ (1,0), & (1,1), & (1,2), & \cdots \\ (2,0), & (2,1), & (2,2), & \cdots \\ \vdots & & & \end{array} \}$$

$$= \{ \underbrace{[(0,0)]}_{} , \ [(1,0),(0,1)], \ [(2,0),(1,1),(0,2)], \ \cdots, \ [(n,0),(n-1,1),\cdots,(i,j),\cdots,(0,n)], \ \cdots \} \quad i,j,n \in \mathbb{N}_0, \ i+j=n$$

0th, 1st, 2nd, …, nth

군수열 형태

i) $(n,0)$ 은 몇 번째?

0th ~ (n-1)th 까지 한 group 에 kth group 이라면 k+1 개 element.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)+1 = \left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right) \text{th}$$

ii) (i,j) 는 몇 번째?

nth group 의 jth element 이니

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}+j+1\right)\text{th}$$

$i+j=n$ 이용 $\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+j+1$ 로 쓸 수 있다.

$\Rightarrow (i,j) \rightarrow \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+j+1$ 로 countable.

$\therefore \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ is countable infinite.

(*주: 수열이나 disjoint 하게 count가 됩니다. 굳이 짝짓기 함수임을 증명해야 하는지는 글쎄요...)

6 pts.
어떻게 증명을 하셨건 논리적 비약이
없으면 만점.

모든 문제 논리적 비약 개당 -1 pts.