

- (정의) **문제**(problem) P
 $P: N \rightarrow \{yes, no\}$ 을 문제로 정의한다.
- (사실) **문제의 개수는 셀 수 없게**¹⁾(uncountable) 많다.
- (사실) **언어**(languages)의 개수도 **셀 수 없게**²⁾(uncountable) 많다.
- (증명) Cantor's Diagonal Argument
 infinite binary string, 자연수의 부분집합, Σ^* 의 부분집합
- (약속) 앞으로 **언어와 문제는 구분하지 않는다**.
- (사실) TM 또는 프로그램은 **셀 수 있게**³⁾(countable) 많다.
- (증명) TM 또는 프로그램은 Σ^* 의 원소이므로, 셀 수 있게 많다.
- (약속) 앞으로 **TM과 프로그램은 구분하지 않는다**.⁴⁾
- (약속) **셀 수 없게**(uncountable) 많음과 **셀 수 있게**(countable) 많음은 **다르므로 구분한다**.
- (정의) **프로그램**⁵⁾으로 풀 수 있는 문제⁶⁾를 **recursively enumerable(type 0)** 이라 부른다.
- (사실) 문제 중에는 **프로그램으로 풀 수 없는**(non-recursively enumerable) 문제가 있다.
- (증명) 문제의 개수는 셀 수 **없게**(uncountable) 많고, 프로그램은 셀 수 **있게** 많다
- (정의) TM 또는 프로그램이 풀 수 있는 문제 중에서 **항상 끝나는 문제**⁷⁾를 **decidable(recursive, terminate, algorithm, type 1)**이라고 부른다.
- (사실) Decidable하지 않은 Undecidable은 프로그램으로 **표현 가능하나 끝나지 않는**(RE but non recursive)와 프로그램으로 **표현 가능하지 않는**(non-RE) 두 가지 경우가 있다.

(정리 9.3) Decidable 한 문제 L 의 complement \bar{L} 도 decidable이다.
 (증명) L 을 위한 프로그램(TM)이 **항상 끝나므로**(recursive), yes로 끝나면 no를, no로 끝나면 yes를 보고하도록 바꾸면 이는 \bar{L} 을 위한 **항상 끝나는**(recursive) 프로그램(TM)이다.

1) $f: A \rightarrow B$ 일 때, $|f| = |B|^{|A|}$ 이고, N 이 자연수 일 때 $2^{|N|}$ 은 uncountable이다.
 2) 언어 L 은 $L \subseteq \Sigma^*$ 이다.
 3) TM M 이나 프로그램 P 는 $M, P \in \Sigma^*$ 이다.
 4) TM과 프로그램이 같음에 관한 증명은 1967년 Meyer와 Ritchie가 하였다.
 5) 위의 약속에 의하여 TM으로 바꾸어도 같다.
 6) Turing이 정의한 TM이 Church가 정의한 μ (minimization)-recursive **partial** function과 같음이 증명되어 있고, 이 증명에 근거한 가설을 Turing Church's Hypothesis(가설)라고 부른다.
 7) **항상 끝나는** TM은 μ -recursive **total** function과 같음이 증명되어 있다.

(정리 9.4) 문제 L 과 complement \bar{L} 가 모두 Recursively enumerable하면, L 과 \bar{L} 모두 recursive하다.

(증명) 문제 L 과 complement \bar{L} 를 위한 프로그램 P 와 \bar{P} 를 동시에(in parallel) 돌리면서, P 가 yes로 끝나면 yes를, \bar{P} 가 yes⁸⁾로 끝나면 no를 보고하면 문제 L 을 위한 프로그램은 항상 끝난다(recursive). 문제 \bar{L} 도 마찬가지이다.

(사실) 정리 9.3과 9.4의 결과를 정리하면, 문제와 문제의 complement의 경우는
 i) 둘 다 recursive한 경우⁹⁾
 ii) 하나는 RE하지만 recursive하지 않고, 나머지 하나는 non-RE한 경우¹⁰⁾
 iii) 둘 다 non-RE인 경우¹¹⁾

세 가지 뿐이다.

Universal and Diagonal Languages

TM과 스트링들의 집합 Σ^* 은 모두 셀 수 있게 많으므로(countable) 자연수로 나열(enumerate)할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{TM: } & M_0, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots \\ \Sigma^*: & x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots \end{aligned}$$

TM의 집합 L_u 를 아래와 같이 정의하고, universal language라고 부른다.

$$L_u = \{M_i \mid x_i \in L(M_i)\}.$$

Universal language L_u 의 complement인 L_d 를 아래와 같이 정의하고, diagonalization language라고 부른다.

$$L_d = \bar{L}_u = \{M_i \mid x_i \notin L(M_i)\}.$$

Universal language L_u 와 diagonalization language L_d 의 언어계급(language hierarchy)을 살펴보자.

(정리 9.2) L_d 는 recursively enumerable이 아니다.

(증명) L_d 가 RE이라고 가정하자. L_d 을 받아들이는 TM M 이, $L(M) = L_d$, 존재한다.

$\therefore \exists i \in N, M = M_i$. 이 때 M_i 에 대응되는 x_i 에 대하여 생각해보자.

만일 $x_i \in L_d$ 라면 L_d 의 정의에 따라서, $x_i \notin L_d$ 이어야 한다.

만일 $x_i \notin L_d$ 라면 L_d 의 정의에 따라서, $x_i \in L_d$ 이어야 한다.

즉 $x_i \in L_d \Leftrightarrow x_i \notin L_d$ 이다.

따라서 L_d 가 RE이라고 가정은 모순이다.

8) RE은, yes면 항상 끝난다.

9) 알고리즘에서 다루는 대부분에 문제들이 이 경우이다.

10) 교과서의 diagonalization language L_d 가 RE가 아닌 경우이고, L_d 의 complement \bar{L}_d 와 같은 universal language L_u 가 RE이나 recursive는 아닌 경우이고, 앞으로 배울 Rice Theorem에 의하면 TM과 관련된 모든 문제가 이 경우에 속한다.

11) 최광무교수는(만?) 이런 문제를 알지 못한다.^^

$\therefore L_d$ 는 recursively enumerable이 아니다.

(정리 9.6) L_u 는 recursively enumerable이지만 recursive는 아니다.

(증명) L_u 가 RE이라고 가정하자. L_u 을 받아들이는 universal TM을 U 이라 하자.

U 는 (M_i, x_i) 를 차례로 만들어 내며, x_i 가 만들어지면 M_i 를 simulate 한다.

이 때 M_i 가 x_i 를 받아들이면¹²⁾, U 도 M_i 를 받아들인다.

$\therefore L_u$ 는 recursively enumerable하다.

$L_d = \overline{L_u}$ 가 RE이 아니므로, L_d 는 recursive가 아니다.

Reduction of one problem to another

문제 $P_1: D_1 \rightarrow \{0, 1\}$ 과 문제 $P_2: D_2 \rightarrow \{0, 1\}$ 에 대하여 아래 조건을 만족하는 함수 $h: D_1 \rightarrow D_2$ 가 존재하면

$$\forall d_1 \in D_1: P_1(d_1) \Rightarrow P_2(h(d_2)) \wedge \neg P_1(d_1) \Rightarrow \neg P_2(h(d_2)),$$

$$\text{즉 } Y_{P_1} \subseteq Y_{P_2} \wedge N_{P_1} \subseteq N_{P_2} \text{ }^{13)},$$

문제 P_1 을 문제 P_2 으로 줄인다¹⁴⁾(reduce)라고 말하고, $P_1 \leq P_2$ 로 쓰고, 문제 P_1 이 문제 P_2 보다 더 쉽거나 같거나, 문제 P_2 가 문제 P_1 보다 더 어렵거나 같다.

예를 들어 어떤 문제 L 을 universal language L_u 로 줄이면($L_u \leq L$), 새로운 문제 L 은 L_u 보다 어렵거나 같으므로, 적어도 undecidable 이상이라고 할 수 있다. 이는 어떤 문제가 undecidable 이상임을 증명하는데 많이 쓰이는 방법이다.

12) $x_i \in L_u$.

13) $P: D \rightarrow \{0, 1\}$ 일 때, $Y_P = \{d \in D \mid P(d) = 1\}$ 과 $N_P = \{d \in D \mid P(d) = 0\}$ 로 정의한다.

14) 문제는 줄였지만, 더 어려워졌다.