정규언어에 닫혀있는 성질(Closure Properties of Regular Languages)

4.3 대수계와 모노이드에 관한 복습

(정의) $\forall a, b \in A : \exists_1 a \oplus b \in A$ 일 때, $\oplus$를 집합 A에서 정의된 이진**연산**(binary **operation**)이라 부르고, 이진연산 $\oplus$가 집합 A에 **닫혀있다**(closed)고 하고, 연산 $\oplus$를 $\oplus : A \times A \rightarrow A$로 표시된다.

(정의) A가 집합이고 $\oplus$가 집합 A에서 정의된 이진연산일 때 순서쌍 $(A, \oplus)$를 **대수계**(**algebraic system**)이라 부른다.

(예) 자연수의 집합 N과 자연수에서 정의된 이진연산 더하기, $+$,는 **닫혀**[1]있고 $(N, +)$는 **대수계**이다.

(정의) $(A, \oplus)$가 대수계이고 이진연산 $\oplus$가 **associative**할 때, 순서쌍 $(A, \oplus)$를 **반 그룹**(**semi-group**)이라 부른다.

$$\forall a, b, c \in A,\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

(정리) $(A, \oplus)$가 반 그룹이면, 이진연산 $\oplus$는 n진$(n-ary)$연산이 된다.

(사실) $(A, \oplus)$가 반 그룹이고 $B \subseteq A$면,

$$\oplus_{a \in B} B \overset{\text{def}}{=} a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n, \text{단 } B = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

(예) $(N, +)$는 **반 그룹**이고, $\sum_{i=1}^{100} i \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=\{1, 2, \cdots, 100\}} i$.

(정의) $(A, \oplus)$가 대수계일 때, $\forall a \in A, \exists e \in A : a \oplus e = e \oplus a = a$이면 e를 집합 A의 연산 $\oplus$에 관한 **항등원**(**identity element**)이라고 부른다.

(정의) $(A, \oplus)$가 반그룹이고 $e \in A$가 항등원일 때, $(A, \oplus, e)$는 **모노이드**(**monoid**)라고 부른다.

(예) $(N, +, 0)$와 $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$은 **모노이드**이다.

4.4 정규언어에 관하여 닫혀있는 성질(정수언어 클래스와 대수계)

(정의) $\mathbb{L}_{\text{Reg}}$을 regular 언어들의 class라고 하고 $\mathbb{E}_{\text{Reg}}$을 regular expression들의 class라고 하자.

(정리) $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \cup)$, $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \cdot)$, $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, {}^*)$는 대수계이다.

(증명1) $\forall L, L_1, L_2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}},\ L(E) = L, L(E_1) = L_1, L(E_2) = L_2$인 $\exists E, E_1, E_2 \in \mathbb{E}_{\text{Reg}}$이라면, $E_1 + E_2, E_1E_2, E^* \in \mathbb{E}_{\text{Reg}}$는 $L_1 \cup L_2, L_1 \cdot L_2, L^* \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}$을 각각 나타내는 정규식이다.

(증명2) $\forall L, L_1, L_2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}},\quad L(M) = L, L(M_1) = L_1, L(M_2) = L_2$인 $\exists M, M_1, M_2 \in \mathbb{M}_{\text{FA}}$이라면, $L_1 \cup L_2, L_1 \cdot L_2, L^* \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}$을 각각 받아들이는(accept) $M_{\cup}, M_{\cdot}, M^* \in \mathbb{M}_{\text{FA}}$이 존재한다.[2]

---

1) 자연수집합 N이 **무한집합**이 아니면 더하기 연산, $+$는, 닫혀있지 않음에 주의하라.
2) 구체적인 내용은 3장의 RE와 같은 일을 하는 FA의 증명을 참조하라.

(정리) $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \neg)$도 대수계이다.
(정리) $(\mathbb{L}_{\text{Reg}}, \cap)$은 대수계이다.
(쉬운 증명) De'Morgan의 법칙

$\forall L_1, L2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}},\ L_1 \cap L_2 = \neg(\neg L_1 \cup \neg L_2) \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}.$

(어려운 증명) $L_1, L_2 \in \mathbb{L}_{\text{Reg}}$이라면,

오토마타 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0_1}, F_1)$, $M_2 = (Q_{21,} \Sigma, \delta_2, q_{0_2}, F_2)$는 각각 $L_1 = L(M_1)$, $L_2 = L(M_2)$라 할 때, 새로운 오토마타 $M_{1\times 2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_{1\times 2}, (q_{0_1}, q_{0_2}), F_1 \times F_2)$가 $L(M_{1\times 2}) = L(M_1) \cap L(M_2)$인 오토마타임을 증명하자.

단 $\forall q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2 \colon \forall a \in \Sigma \colon \delta_{1\times 2}((q_1, q_2), a) \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$라 하자.

i) $L(M_1) \cap L(M_2) \subseteq L(M_{1\times 2})$의 증명

$\forall x \in L(M_1) \cap L(M_2)\colon \quad \exists\, \delta_1(q_{0_1}, x) \in F_1 \ \wedge\ \exists\, \delta_2(q_{0_2}, x) \in F_2.$

$\therefore\ \delta_{1\times 2}((q_{0_1}, q_{0_2}), x) = (\delta_1(q_{0_1}, x), \delta_2(q_{0_2}, x)) \in F_1 \times F_2. \qquad \therefore\ x \in L(M_{1\times 2}).$

ii) $L(M_{1\times 2}) \subseteq L(M_1) \cap L(M_2)$의 증명

$\forall x \in L(M_{1\times 2})\colon \quad \exists\, \delta_{1\times 2}((q_{0_1}, q_{0_2}), x) = (\delta_1(q_{0_1}, x), \delta_2(q_{0_2}, x)) \in F_1 \times F_2.$

$\therefore\ \delta_1(q_{0_1}, x) \in F_1 \ \wedge\ \delta_2(q_{0_2}, x) \in F_2. \qquad \therefore\ x \in L(M_1) \cap L(M_2).$

i+ii) $\forall x \in \Sigma^*\colon \quad \delta_{1\times 2}((q_{0_1}, q_{0_2}), x) = (\delta_1(q_{0_1}, x), \delta_2(q_{0_2}, x)).$

$\therefore\ L(M_{1\times 2}) = L(M_1) \cap L(M_2).$

i)과 ii)를 따로 증명하여야 하나, =에 symmetric한 성질을 이용하여, i+ii)로 증명해도 된다.

×가 순서쌍 (q_1, q_2)에 집합이므로, 위의 표현이 맞으나, 교과서와 같이 상태 순서쌍을 대괄호와 세미콜론(;)으로 구분하여, $[q_1; q_2]$, $M_{1\times 2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_{1\times 2}, [q_{0_1}; q_{0_2}]), F_1 \times F_2)$로 **표현**한 후 $\delta_{1\times 2}([q_1; q_2], a) \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_1(q_1, a); \delta_2(q_2, a)]$로 **정의**하여, $\delta_{1\times 2}([q_{0_1}; q_{0_2}], x) = [\delta_1(q_{0_1}, x); \delta_2(q_{0_2}, x)]$로 **증명**하여 함수 소괄호와 순서쌍 소괄호의 **중복을 피한**다.

오토마타 $M_{1\times 2}$은 오토마타 M_1과 M_2 두 개를 흉내 내므로(simulate) **곱하기**(product) 오토마타라고 부른다. $L(M_1)$과 $L(M_2)$에 **합집합**을 받아들이는 오토마타$M_{1|2}$, $L(M_{1|2}) = L(M_1) \cup L(M_2)$를 곱하기 오토마타와 상태, 상태변화함수, 초기상태는 모두 같으나 **최종상태만 다르게 정의**하면 된다.

$M_{1|2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_{1\times 2}, [q_{0_1}; q_{0_2}], F_1 | F_2)$

단 $\delta_{1\times 2}([q_1; q_2], a) \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_1(q_1, a); \delta_2(q_2, a)]$,

$F_{1|2} \stackrel{\text{def}}{=} \{[f_1; f_2] \in F_1 \times F_2 \mid f_1 \in F_1 \vee f_2 \in F_2\}.$

(**정의**) n개의 정규언어를 정의하는 오토마타 $M_1, M_2, \cdots, M_n$에 대하여, $\bigcup_{i=1}^{n} L(M_1)$과 $\bigcap_{i=1}^{n} L(M_1)$을 정의하는 두 개의 $n-$**곱하기 오토마타** $M_{\cup}^{n}$ **과** $M_{\cap}^{n}$ **을** 최종상태 $F_{\cup}$과 $F_{\cap}$만 다르게 하여 아래와 같이 정의한다.

$$M_{\cup}^{n} = (Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n),\ T,\ \delta^n,\ [q_{0_1}; q_{0_2}; \cdots ; q_{0_n}],\ F_{\cup}\ ),$$

$$M_{\cap}^{n} = (Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n),\ T,\ \delta^n,\ [q_{0_1}; q_{0_2}; \cdots ; q_{0_n}],\ F_{\cap}\ ),$$

단 $\delta^n([q_1; q_2; \cdots ; q_n], a) \overset{\text{def}}{=} [\delta_1(q_1, a); \delta_2(q_2, a); \cdots ; \delta_n(q_n, a)]$이고

$$F_{\cup} = \left\{[f_1; f_2; \cdots ; f_n] \mid \vee_{i=1}^{n} (f_i \in F)\right\},$$

$$F_{\cap} = \left\{[f_1; f_2; \cdots ; f_n] \mid \wedge_{i=1}^{n} (f_i \in F)\right\}$$이다.