Induction 혹은 Recursion 혹은 수학적 귀납법

recursion은 자연수와 관련된 **무한한** 집합 또는 구조를 **유한하게** 정의하거나 증명하는데 사용되는 매우 중요한(사실 **유일한**) 방법이다.

이는 **무한한 자연수**를 정의함으로서 시작된다. (1)
Basis 0은 **자연수**이다.
Recursion 어떤 수가 **자연수**이면 그것보다 하나 더 큰 수도 **자연수**이다.

자연수를 정의하는 위의 구조는 아주 전형적인 recursion의 구조를 가지고 있으며 이를 아래와 같이 **수학기호**를 이용하여 정의할 수 있다.

자연수집합 N은 다음과 같이 정의된다. (1‘)
Basis $0 \in N$.
Recursion $If\ n \in N,\ then\ n+1 \in N$.
Recursion’ $n \in N \Rightarrow n+1 \in N$.

이 구조는 (1) 자연수의 시작인 0(중학교에서는 그 시작이 1이었다[1])이 **자연수**임을 기술하는 **basis**와 (2) 임의의 수 n이 **자연수 일 때** 그 **다음 수** $n+1$이 **자연수임**을 기술하는 **recursion**의 두 개의 구조로 이루어져 있다. 특히 recursion은 1) 가정이 사실이면 결론도 사실이다(가정 ⇒ 결론)라는 전형적인 연역(deduction)인 implication(⇒)구조를 가진다는 점과 2) **가정**에 정의하고자 하는 **자연수집합** N이 들어있다는 연역적(deductive)인 사고가 아닌 **비연역적**(non-deductive; recursive) 구조를 가지고 있다. 그래서 이를 **recursive 정의**하고 부른다.

이를 좀 더 일반화하여 보자.

집합 S는 다음과 같이 정의된다. (2)
Basis $\exists k \geq 1:\ s_1, s_2, \cdots, s_k \in S$.
Recursion $(\exists n \geq 1:\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in S) \Rightarrow (f(x_1, x_2 \cdots, x_n) \in S)$.

이 때 함수 f가 중요하며, 자연수의 경우 n은 1이고 함수 f는 다음 수이다.

교과서 예제 1.19 **뿌리 있는 나무**(rooted-tree)의 정의
Basis 노드 하나만 있는 것도 그 노드를 뿌리로 하는 **뿌리 있는 나무**이다.
Recursion $T_1, T_2, \cdots, T_n$이 **뿌리 있는 나무**라고 하자. 새로운 노드 r에서 각 뿌리 있는 나무 $T_1, T_2, \cdots, T_n$의 뿌리 $r_1, r_2, \cdots, r_n$로 가는 edge를 연결하면 노드 r을 뿌리로 하는 새로운 **뿌리 있는 나무**가 정의된다.

---

1) 정확한 이유는 뒤에 셀 수 있는 무한(countable infinite)를 배우면 이해할 수 있다.

위의 정의를 좀 더 수학적으로 세련된 표현으로 정의해 보자. 그 이전에 **뿌리 있는 나무틀**을 미리 정의할 필요가 있다.

뿌리 있는 나무 $T = (V,\ E,\ r)$

i) V는 노드의 집합,

ii) E는 에지의 집합, 단 $(u,v) \in E$는 노드 $u \in V$에서 노드 $v \in V$로 가는 에지다,

iii) 특별한 노드 $r \in V$은 뿌리다.

Basis $(\{v\},\ \varnothing,\ v)$는 뿌리 있는 나무다.

Recursion 자연수 $n(n \geq 1)$에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1)$, $T_2 = (V_2, E_2, r_2)$, $\cdots$, $T_n = (V_n, E_n, r_n)$ 이 뿌리 있는 나무라고 하면, 새로운 노드 $r \not\in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$를 추가하여, $T = (V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \{r\},\ E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \{(r,r_1),(r,r_2),\cdots,(r,r_n)\},\ r)$가 새로운 뿌리 있는 나무이다.

Recursion' 자연수 $n(n \geq 1)$에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1)$, $T_2 = (V_2, E_2, r_2)$, $\cdots$, $T_n = (V_n, E_n, r_n)$ 이 뿌리 있는 나무라고 하면, 새로운 뿌리 있는 나무 $T = (V,\ E,\ r)$는 아래로 정의한다.

i) $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \{r\}$,

ii) $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \{(r,r_1),(r,r_2),\cdots,(r,r_n)\}$,

iii) $r \not\in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$.

교과서 예제 1.20의 식의 정의

Basis 수와 문자는 식이다.

Recursion 식 + 식, 식 - 식, 식 × 식, 식 ÷ 식, (식)[2)]은 식이다.

<u>Recusive 정의의 유한성과 무한성</u>

유한한 Recusive 정의로 무한집합을 정의할 수 있다.[3)]

<u>Recursive하게 정의된 무한집합이 만족하는 성질의 증명</u>

가정 집합 S가 식(2)에 의하여 정의된 집합이다.

결론 $\forall x \in S,\ p(x)$.

증명 Basis $p(s_1), p(s_2), \cdots, p(s_k),\ k \geq 1$을 증명한다.

Recursion $p(x_1), p(x_2), \cdots, p(x_n),\ n \geq 1 \Rightarrow p(f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$을 증명한다.

2) 결론에 식을 바로 씀으로서 recursive 가정(…이 식이면)이 생략되었음에 주의하라.

3) Recursive 정의는 사실 무한한 집합을 유한하게 정의하는 유일한 방법이다. 이를 유한한 recursive 정의의 **무한한 지혜(infinite wisdom)**라고 부르기도 한다.