

2.1.3 ϵ -move 를 허용한다

(해결책) ϵ -closure(ϵ^*)를 구한다.

오토마타를 더 확장해보자. ϵ -move 를 허용한다. 즉 기존에 NFA에서 입력문자열을 보지 않고 상태를 바꿀 수 있게 한다.

이 상황을 상태변화함수 δ 로 표시하면 아래와 같다.

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q.$$

즉 상태변화함수의 두 번째 도메인에 $\{\epsilon\}$ 을 추가하여, $\delta(q, \epsilon) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 을 허용한다.

(정의 10) ϵ -move 를 허용하는 오토마타 $M_{\epsilon-NFA} = (Q, \Sigma, \delta_{\epsilon-NFA}, q_0, F)$ 는 아래와 같이 정의한다.

(1), (2), (4), (5)의 Q, Σ, q_0, F 는 기본정의 M_{DFA} 와 같다. 단

(3) $\delta_{\epsilon-NFA}: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$ 상태변화함수만이 다르다.

(정의 11) $\mathbb{M}_{\epsilon-NFA}$ 를 $M_{\epsilon-NFA}$ 전체의 오토마타 클래스라 부른다.

(쉬운정리 3) $\mathbb{M}_{DFA} \subsetneq \mathbb{M}_{\text{부분}} \subsetneq \mathbb{M}_{NFA} \subsetneq \mathbb{M}_{\epsilon-NFA}$.

$\mathbb{M}_{NFA} \subsetneq \mathbb{M}_{\epsilon-NFA}$ 이므로 쉽다.

(정의 10)와 (쉬운정리 3)으로 확장의 첫 번째와 두 번째 작업인 확장된 오토마타 클래스의 (A) 정의와 (B) 확장을 마치었다. 확장에 마지막 작업으로 같은 일을 하면서 상태변화함수 δ 가 전체함수인 오토마타 클래스로 바꾸어보자.

(정의 12) 상태변화함수 δ 의 첫 번째 정의역을 상태(Q)에서 상태집합(2^Q)으로 확장하고 두 번째 정의역을 $\{\epsilon\}$ 분리하여 따로 생각하자.

$$\delta': 2^Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

$$\delta'(P, a) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in Q \mid p \in P, \delta(p, a) = q, a \in \Sigma\}$$

$$= \bigcup_{p \in P} \delta_{\epsilon-NFA}(p, a) = \delta_{\epsilon-NFA}(P, a)$$

(정의 13) 정의 12에서 분리된 ϵ -move를 ϵ 으로 간단하게 써보자.

$$\epsilon: 2^Q \rightarrow 2^Q$$

$$\epsilon(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in Q \mid p \in P, \delta(p, \epsilon) = q\}$$

$$= \bigcup_{p \in P} \delta_{\epsilon-NFA}(p, \epsilon) = \delta_{\epsilon-NFA}(P, \epsilon)$$

(정의 14) 반복 ϵ -move $\epsilon^i (i \geq 0)$ 을 정의하자.

$$\epsilon^i: 2^Q \rightarrow 2^Q$$

$$\epsilon^0(P) \stackrel{\text{def}}{=} P \quad \text{단 } P \subseteq Q (P \in 2^Q).$$

$$\epsilon^{i+1}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon(\epsilon^i(P)) \quad \text{단 } i \geq 1, P \subseteq Q (P \in 2^Q).$$

(정의 15) ϵ -move의 반복합 ϵ^* 를 정의하자.

$$\epsilon^*: 2^Q \rightarrow 2^Q$$

1) 앞 장의 NFA (정의 8)과 같다.

$$\epsilon^*(P) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \epsilon^i(P) \quad \text{단 } P \subseteq Q (P \in 2^Q).$$

즉 ϵ^* 는 ε-NFA에서 추가로 정의된 $\delta(q, \epsilon)$ 을 여러 번 하는 것이다.

임의의 $M_{\epsilon-NFA}$ 를 같은 일을 하는 M_{DFA} 로 바꾸어주는 알고리즘을 보자.

(알고리즘) **function** $\epsilon\text{-NFA_to_DFA}(Q_{\epsilon-NFA}$ (ε-NFA상태집합), Σ , $\delta_{\epsilon-NFA}$ (ε-NFA상태변화함수), $q_0 \in Q_{\epsilon-NFA}$, $F_{\epsilon-NFA} \subseteq Q_{\epsilon-NFA}$) **returns** (Q_{DFA} (DFA상태집합), Σ , δ_{DFA} (DFA상태변화함수), $q_0^{DFA} \in Q_{DFA}$, $F_{DFA} \subseteq Q_{DFA}$);

variable $P \subseteq Q_{\epsilon-NFA}$; $a \in$ 입력문자집합(Σ);

$$q_0^{DFA} = \epsilon^*({q_0}); \quad q_0^{DFA} \subseteq Q_{DFA}^2;$$

repeat

for $P \in Q_{DFA}$ **do**

for $a \in \Sigma$ **do**

$$\epsilon^*(\delta_{\epsilon-NFA}(P, a)) \subseteq Q_{DFA}; \quad (\delta_{DFA}(P, a) = \epsilon^*(\delta_{\epsilon-NFA}(P, a))) \subseteq \delta_{DFA};^{3)}$$

od

if $(P \cap F_{\epsilon-NFA}) \neq \emptyset \rightarrow P \subseteq F_{DFA}$ **else skip** **fi**

od

until no more new states are added to Q_{DFA}

return $M_{DFA} = (Q_{DFA}, \Sigma, \delta_{DFA}, q_0^{DFA}, F_{DFA})$;

end function NFA_to_DFA ;

(부분정리) $Q_{DFA} = 2^{Q_{\epsilon-NFA}} = \{P \mid P \subseteq Q_{\epsilon-NFA}\} = \{P \mid P \in Q_{DFA}\}$

$$P \subseteq Q_{\epsilon-NFA} (\equiv P \in 2^{Q_{\epsilon-NFA}} \equiv P \in Q_{DFA}), \quad a \in \Sigma.$$

$$\delta_{DFA}(P, a) = \epsilon^*(\delta_{\epsilon-NFA}(P, a)).$$

$$F_{DFA} = \{P \in 2^{Q_{DFA}} \mid P \cap F \neq \emptyset\}$$

(증명1) 위의 (알고리즘)은 임의의 ε-NFA에서 위의 (부분정리)을 만족하는 DFA를 만든다.

(증명2) $L(M_{\epsilon-NFA}) = L(M_{DFA})$

(생략)

(중요정리 3) \mathbb{M}_{DFA} 와 $\mathbb{M}_{\text{부분}}$, \mathbb{M}_{NFA} , $\mathbb{M}_{\epsilon-NFA}$ 는 모두 같은 일을 하는(같은) 오토마타 클래스이다.

2.1.4 입력문자열(Σ^*)에 대한 상태변환을 허용한다

(해결책) 중간에 입력문자 하나씩 보고 상태를 바꾸는 중간상태들을 추가한다.

2) 이러한 표현은 declarative 언어에서 쓰는 표현으로 앞 장의 procedural 언어의 $Q_{DFA} := Q_{DFA} \cup \{q_0^{DFA}\}$ 와 같다. 또한 엄밀히 쓰면 $\{q_0^{DFA}\} \subseteq Q_{DFA}$ 로 써야하나, 집합을 위한 $\{\}$ 기호를 빼고 $q_0^{DFA} \subseteq Q_{DFA}$ 로 쓰기도 한다.

3) $Q = \epsilon^*(\delta_{\epsilon-NFA}(P, a))$;라 하고, $Q \subseteq Q_{DFA}$; $(\delta_{DFA}(P, a) = Q) \subseteq \delta_{DFA}$ 와 같다.

오토마타를 더 확장해보자. ε-move뿐만이 아니라 길이 2 이상의 입력문자열에 의한 상태 변화도 허용한다. 즉 기존에 ε-NFA에서 입력문자 여러 개를 보고 한꺼번에 상태를 바꿀 수 있게 한다.

이 상황을 상태변화함수 δ로 표시하면 아래와 같다.

$$\delta: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q.$$

즉 상태변화함수의 두 번째 도메인을 Σ^* 로 확장하여, $\delta(q, a_1 a_2 \dots a_k) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 을 허용한다.

(정의 12) 확장된 오토마타 $M_{XFA} = (Q, \Sigma, \delta_{XFA}, q_0, F)$ 는 아래와 같이 정의한다.

(1), (2), (4), (5)의 Q, Σ, q_0, F 는 기본정의 M_{DFA} 와 같다. 단

(3) $\delta_{XFA}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ 상태변화함수만이 다르다.

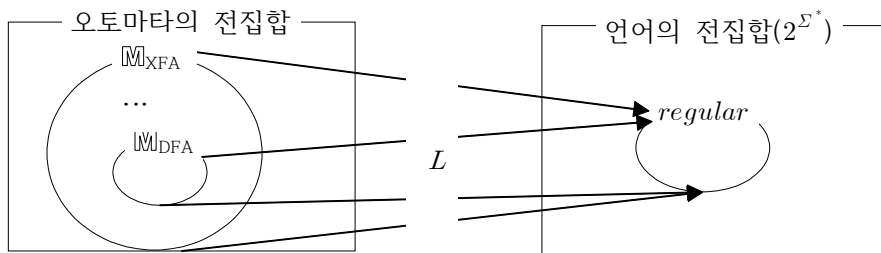
(정의 13) \mathbb{M}_{XFA} 를 M_{XFA} 전체의 오토마타 클래스라 부른다.

(쉬운정리 4) $\mathbb{M}_{DFA} \subsetneq \mathbb{M}_{부분} \subsetneq \mathbb{M}_{NFA} \subsetneq \mathbb{M}_{\epsilon-NFA} \subsetneq \mathbb{M}_{XFA}$.

$\mathbb{M}_{\epsilon-NFA} \subsetneq \mathbb{M}_{XFA}$ 이므로 쉽다.

(정의 12)와 (쉬운정리 4)로 확장의 첫 번째와 두 번째 작업인 확장된 오토마타 클래스의 (A) 정의와 (B) 확장을 마치었다. 확장에 세 번째 작업으로 같은 일을 하면서 상태변화함수 δ가 입력문자 하나에 대하여 전체함수인 오토마타로(DFA) 바꾸는 작업은, (1) 길이가 0인 ε-move는 2.1.3의 알고리즘을 이용하고, (2) 길이 2 이상인 문자열(길이 n)에 관한 상태변환은 중간에 문자 하나만 보고 상태를 바꾸는 중간 상태 (n-1)개를 넣어줌으로 쉽게 해결되므로 생략한다.

(중요정리 4) \mathbb{M}_{DFA} 와 $\mathbb{M}_{부분}$, \mathbb{M}_{NFA} , $\mathbb{M}_{\epsilon-NFA}$, \mathbb{M}_{XFA} 는 모두 같은 일을 하는(같은) 오토마타 클래스이다.



확장된 오토마타 \mathbb{M}_{XFA} 를 줄여서 오토마타 \mathbb{M}_{FA} 라 부르기도 한다.

(마지막 중요정리) \mathbb{M}_{DFA} , $\mathbb{M}_{부분}$, \mathbb{M}_{NFA} , $\mathbb{M}_{\epsilon-NFA}$, \mathbb{M}_{FA} 는 모두 같은 언어 클래스(정규언어)를 정의하는 오토마타 클래스이고 서로 바꿀 수 있으므로, 구분 없이 사용한다.

| | | |
|--------------------|---|-----------------------------------|
| \mathbb{M}_{DFA} | $\delta_{DFA}: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ | $Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ |
| $\mathbb{M}_{부분}$ | $\delta_{부분}: Q \times \Sigma \rightarrow Q \cup \{\emptyset\}$ | $Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ |

| | | |
|-----------------------------|--|---------------------------------------|
| \mathbb{M}_{NFA} | $\delta_{NFA}: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ | $2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ |
| $\mathbb{M}_{\epsilon-NFA}$ | $\delta_{\epsilon-NFA}: Q \times \{\Sigma \cup \{\epsilon\}\} \rightarrow 2^Q$ | $2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ |
| \mathbb{M}_{FA} | $\delta_{FA}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ | $2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ |