

Recursion은 자연수와 관련된 **무한한 집합** 또는 구조를 **유한하게 정의**하거나 **증명**하는데 사용(**infinite wisdom**)되는 매우 중요한(사실은 **유일한**) 방법이다.

이는 **무한한 자연수**를 정의함으로서 시작된다<sup>1)</sup>.

Basis  $0$ 은 자연수이다. (1)

Recursion 어떤 수가 **자연수**이면 그것보다 하나 더 큰 수도 **자연수**이다. (2)

자연수를 정의하는 위의 구조는 아주 전형적인 recursion의 구조를 가지고 있으며 이를 아래와 같이 **수학기호**를 이용하여 정의할 수 있다.

자연수집합  $N$ 을 수학기호를 이용하여 아래와 같이 정의된다.

Basis  $0 \in N$ .

Recursion *If*  $n \in N$ , *then*  $n++ \in N$ <sup>2)</sup>.

Recursion'  $n \in N \Rightarrow n++ \in N$ .

이 정의는 (1) 자연수의 **시작**인  $0$ (중학교에서는 그 시작이  $1$ 이었다<sup>3)</sup>)이 **자연수**임을 기술하는 **basis**와 (2)  $n$ 이 **자연수** 일 때 그 **다음 수**  $n+1$ 이 **자연수**임을 기술하는 **recursion**의 두 개의 구조로 이루어져 있다. 특히 **recursion**은 1) 가정이 사실이면 결론도 사실이다(가정  $\Rightarrow$  결론)라는 전형적인 연역(deduction)구조인 implication( $\Rightarrow$ )를 가지면서, 2) **가정**에 정의하고자 하는 **자연수집합**  $N$ 이 들어있다는 연역적(deduction)인 구조가 아닌 **비연역적**(non-deductive; recursive) 구조를 가지고 있다. 그래서 이를 **recursive** 정의하고 부른다.

이를 좀 더 **일반화**하여 보자.

집합  $S$ 는 다음과 같이 정의된다. (3)

Basis  $\exists k \geq 1: s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ .

Recursion ( $\exists n \geq 1: x_1, x_2, \dots, x_n \in S \Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S)$ ).

이 때 함수  $f$ 가 중요하며, 자연수의 경우  $n$ 은  $1$ 이고 함수  $f$ 는 다음 수이다.

교과서 예제 1.19 **뿌리나무**(rooted-tree)의 정의

Basis 노드 하나만 있는 것도 그 노드를 뿌리로 하는 **뿌리나무**이다.

Recursion  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 이 **뿌리나무**라고 하자. 새로운 노드  $r$ 에서 각 **뿌리나무**  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 의 **뿌리**  $r_1, r_2, \dots, r_n$ 로 가는 edge를 연결하면 노드  $r$ 을 새로운 **뿌리**로 하는 새로운 **뿌리나무**가 정의된다.

1) Peano axiom

2)  $n++ = n+1$ 이며, Peano axiom에서는 아직  $+$ 연산이 정의되지 않아 다음 수  $++$ 를 사용하였다.

3) 셀 수 있는 무한(countably infinite) 집합  $\{1, 2, 3, \dots\}$ 과  $\{0, 1, 2, \dots\}$ 은 서로 동등( $\cong$ ; isomorphism)하므로, 두 가지 정의가 모두 옳다.

위의 정의를 좀 더 수학적으로 세련된 표현으로 정의해 보자. 그 이전에 **뿌리나무**라는 **틀**을 미리 정의하는 것이 수학적으로 더 세련된 방법이다.

뿌리나무  $T = (V, E, r)$

- i)  $V$ 는 노드의 집합,
- ii)  $E$ 는 에지의 집합, 단  $(u, v) \in E$ 는 노드  $u \in V$ 에서 노드  $v \in V$ 로 가는 에지다,
- iii) 특별한 노드  $r \in V$ 은 뿌리다.

Basis  $(\{v\}, \emptyset, v)$ 는 뿌리나무다.

Recursion 자연수  $n(n \geq 1)$ 에서  $T_1 = (V_1, E_1, r_1), T_2 = (V_2, E_2, r_2), \dots, T_n = (V_n, E_n, r_n)$  이 뿌리나무라고 하면, 새로운 노드  $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ 을 더하여,

$T = (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n \cup \{r\}, E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \{(r, r_1), (r, r_2), \dots, (r, r_n)\}, r)$ 가 새로운 뿌리나무이다.

Recursion' 자연수  $n(n \geq 1)$ 에서  $T_1 = (V_1, E_1, r_1), T_2 = (V_2, E_2, r_2), \dots, T_n = (V_n, E_n, r_n)$  이 뿌리나무라고 하면, 새로운 뿌리나무  $T = (V, E, r)$ 는 아래로 정의한다.

- i)  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n \cup \{r\}$ , 단  $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ .
- ii)  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \{(r, r_1), (r, r_2), \dots, (r, r_n)\}$ ,

교과서 예제 1.20의 식의 정의

Basis 수와 문자는 식이다.

Recursion 식 + 식, 식 - 식, 식  $\times$  식, 식  $\div$  식, (식)<sup>4</sup>은 식이다.

Recursive 정의의 유한성과 무한성

**유한한** Recursive 정의로 **무한집합**을 정의할 수 있다.<sup>5)</sup>

Recursive하게 정의된 무한집합이 만족하는 성질의 증명

가정 집합  $S$ 가 식(3)에 의하여 정의된 집합이다.

결론  $\forall x \in S, p(x)$ .

증명 Basis  $p(s_1), p(s_2), \dots, p(s_k), k \geq 1$ 을 증명한다.

Recursion  $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), n \geq 1 \Rightarrow p(f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ 을 증명한다.

4) 가정에 식을 그대로 씌우어서 recursive 가정(...이 식이면)이 생략되었음에 주의하라.

5) Recursive 정의는 사실 무한한 집합을 유한하게 정의하는 유일한 방법이다. 이를 유한한 recursive 정의의 **무한한 지혜(infinite wisdom)**라고 부르기도 한다.

(정의) 집합의 동등(Set isomorphism)

두 집합  $A$ 와  $B$  사이에 전단사함수(bijection)  $f$ 가 존재하면,  $f(A)=B$ 이고  $f^{-1}(B)=A$  이므로, 집합  $A$ 와 함수  $f$ 로 집합  $B$ 를 만들어 낼 수 있고, 집합  $B$ 와 함수  $f^{-1}$ 로 집합  $A$ 를 만들어 낼 수 있어서, 집합  $A$ 와  $B$ 는 함수  $f$ 를 통하여 동등하다(isomorphic w.r.t.  $f$ )(같다)고 하고  $A \cong_f B$ 로 쓴다.

(정의) 집합의 크기(Cardinality of sets)

$$|A| = |B| \iff A \cong_f B.$$

두 집합이 동등할 때( $\cong$ ) 두 집합이 **크기(cardinality)**가 같다고 정의한다.

유한집합의 동등

$$\{1, 2, 3\} \cong \{a, b, c\}$$

무한집합의 동등

(예 1) 1부터 시작하는 자연수 집합  $N_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ 과 0부터 시작하는 자연수 집합  $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 과 을 생각하자.  $N_1 = \{1, 2, 3, \dots\} \subset N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 이지만,

$f: N_1 \rightarrow N_0, \forall i \in N_1: f(i-1)$ 과  $f^{-1}: N_0 \rightarrow N_1, \forall i \in N_0: f^{-1}(i+1)$ 를 보면  $\{1 \leftrightarrow_f 0, 2 \leftrightarrow_f 1, 3 \leftrightarrow_f 2, \dots, n+1 \leftrightarrow_f n, \dots\}$ . 즉  $f(N_1) = N_0$ 이고  $f^{-1}(N_0) = N_1$  이므로  $N_1 = \{1, 2, 3, \dots\} \cong_f N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 이다. 즉  $|N_1| = |N_0|$ 이다.

(예 2) 자연수 집합  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 과 짝수 집합  $E = \{0, 2, 4, \dots\}$ 을 생각하자.  $E \subset N$ 이지만  $E \cong N$ 이다.

(예 3) 자연수 집합  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 과 자연수 순서쌍 집합  $N \times N = \{(i, j) | i, j \in N\}$ 을 생각하자.  $N \cong N \times N$ 이다.

(정의) 자연수의 부분집합과 동등한 집합을 **셀 수 있는(countable)** 집합이라 정의하고, 그렇지 않으면 **셀 수 없는(uncountable)** 집합 이라고 정의한다.

(사실) **셀 수 있는** 집합은 (셀 수 있는)유한집합과 **셀 수 있게 무한한** 집합 두 가지 종류가 있다.

(정리) 모든 **셀 수 있는** (무한)집합은 자연수에 부분집합과 동등(isomorphic)하다.

(사실) 모든 **셀 수 있는** (무한)집합은 자연수로 번호 매길 수(enumerable<sup>8)</sup>) 있다.

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$$

6) 중학교에서는 1부터 자연수를 대학교에서는 0부터 자연수를 정의해도 되는 이유이다.

7) 이 때 짝짓기 함수  $f$ 는 무엇인가?  $N \subset N \times N$ 인가?

8) RE(Recursively Enumerable)이라고 정의하며, 8장 Turing Machine에서 배운다.

(의문) 셀 수 없는(uncountable) 무한집합이 있는가?

(정리) 무한이진수(infinite binary string)는 셀 수 없게 무한(uncountably infinite)하다.

(가정) 무한이진수 집합  $F = \{f \mid f: N \rightarrow \{0,1\}\}$ 이 셀 수 있게 무한하다고 하자.

(결론)  $|F|$ 는 셀 수 없는 무한이다.

(증명) Cantor의 대각선화 주장(Cantor's diagonal argument, 1812)<sup>10)</sup>

집합  $F$ 가 셀 수 있는 무한이라고 가정하자.

그러면 집합  $F$ 의 원소 들은 자연수도 번호 매길 수 있을 것이다.

$$F = \{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$$

$$f_0 = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, \dots), \forall i \in N: f_0(i) = a_{0i} \in \{0,1\},$$

$$f_1 = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots), \forall i \in N: f_1(i) = a_{1i} \in \{0,1\},$$

...

$$f_n = (a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{nn}, \dots), \forall i \in N: f_n(i) = a_{ni} \in \{0,1\},$$

...

여기서 대각선(diagonal) 무한이진수  $f = (a_{00}, a_{11}, \dots, a_{nn}, \dots)$ 와 그것의 부정  $\bar{f}$ 를 생각하자.

$$f = (a_{00}, a_{11}, \dots, a_{nn}, \dots), \forall i \in N.$$

$$\bar{f} = (\overline{a_{00}}, \overline{a_{11}}, \dots, \overline{a_{nn}}, \dots), \forall i \in N: \overline{a_{ii}} = 0, \text{ if } a_{ii} = 1; \overline{a_{ii}} = 1, \text{ if } a_{ii} = 0.$$

$\forall i \in N: \bar{f} \neq f_i$ 이어서  $\bar{f} \notin F$ 이지만,

$\bar{f}$ 는 집합  $F$ 의 원래 정의에 맞는 무한이진수 이므로  $\bar{f} \in F$ 이어야 한다.

따라서 집합  $F$ 가 셀 수 있는 무한이라는 증명 초기의 가정이 거짓이다.(귀류법)

따라서 집합  $F$ 는 셀 수 있는 무한이 아니다. 즉 집합  $F$ 는 셀 수 없는 무한이다.

(사실) 자연수의 부분집합의 집합(멱집합; Power set)도 셀 수 없는 무한이다.

(증명)  $\{f \mid f: N \rightarrow \{0,1\}\} \cong_g 2^N$

$$011010100\dots \leftrightarrow_g \{1, 2, 4, 6, \dots\} \leftrightarrow_{g'} \{2, 3, 5, 7, \dots\} \dots$$

무한이진수나 자연수의 부분집합은 셀 수 없이 많다(uncountably infinite, uncountable)

집합 크기(cardinality)의 종류

셀 수 있는(countable)

유한(finite)

셀 수 있게 많은 무한(countably infinite)

셀 수 없는(uncountable)

셀 수 없이 많은 무한(uncountably infinite)

9) 집합  $F$ 의 원소  $f$ 는 0과 1로 이루어진 무한 이진수다. 예,  $f = 011010100\dots$

10) Cantor에 대각선화 증명으로 무리수  $\sqrt{2}$ 나  $\pi$ 를 포함하는 실수  $R$ 이 셀 수 없는 무한임을 증명할 수 있게 됐다.