학번: **이름:**

CS204 이산구조 답지

1. 모든 답지의 상단에 자신의 학번과 이름을 정확하게 기록할 것.
2. 각각의 큰 문제는 다른 페이지에 기록할 것.
3. 자신이 푼 문제를 정확하게 아래 표에 표시할 것.

   (풀지 않은 문제를 풀었다고 표시한 경우에는 10 점 감점함)
4. 아래 표의 **점수 칸은 기록하지 말 것.**

문제 번호	푼 문제 표시 (O,X)	점수/배점
1		/30
2		/45
3		/30
4		/35
5		/30
6		/30
7		/25
총점		/225

1. A = CS204 를 수강하는 학생들의 집합

B = 전산과 학생들의 집합

라고 하고, 다음 물음에 답하시오.

(1) 다음의 명제를 집합 A, B 와 논리 기호를 이용해 표현해보시오. (15 점)

i) CS204를 수강하는 학생들은 모두 전산과 학생이다.

ii) 전산과 학생 중에 CS204를 수강하지 않은 학생도 있다.

iii) CS204를 수강하는 학생들 중 적어도 1명은 전산과 학생이 아니다.

(2) (1)의 iii)을 증명하는 알고리즘을 for loop을 사용하지 말고 Dijkstra의 do…od loop 이나 Python의 while loop을 사용하여 쓰시오. (15점)

(참고) 1단원 1.6의 알고리즘이 약간 틀렸다.

2. (1) 아래에 주어진 수열에서 빈칸에 들어갈 수를 찾고, 이를 일반화한 Recursive Definition을 구하고 증명하시오. (20 점)

i) 1, 0, 2, 2, 4, ( ), 8, 26, 16, 80, …

ii) 3, ( ), 2, 3/4, 4, –1/4, 1, 5/4, …

(2) 하노이 탑 문제 최적 해(optimal solution)의 Recursive Definition과 일반항을 구하시오. (25점)

(하노이 탑 문제) 판 위에 3개의 막대 A, B, C가 있다. 반지름이 약간씩 다른 원반이 있고 그 중심에는 구멍이 뚫려 있어 막대에 꼽을 수 있다. 작은 반지름의 원반이 위

에 오도록 하여 A 막대에 n개의 원반이 꼽혀있다. 다음의 규칙에 따라서 모든 원반을 C 막대로 이동시킨다.

① 1회에 한 개의 원반밖에 이동할 수 없다.

② 이동은 막대에서 막대로 이루어진다.

③ 작은 원반 위에 큰 원반을 올려놓을 수 없다.

(힌트) 원반이 1 개 일 때는 A 막대에 있는 원반을 C 막대로 가지고 가면 된다. (Basis)

원반이 k 개 있을 때는, 제일 밑에 있는 가장 큰 원반을 C 막대로 옮기기 위하여는, 위에 있는 원반 (k-1)개를 모두 비어있는 B 막대로 옮길 수 있어야 한다. (Induction hypothesis)

3. 임의의 문자집합(vocabulary) $\mathbf{V}$를 생각하자. 예: 영어 $\mathbf{V} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{z}\}$. 길이 $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$ 인 문자열(string)의 집합 $\mathbf{V^k}$를 아래와 같이 recursive 하게 정의하자.

$$\mathbf{V^0} =_{\mathbf{B}} \{\boldsymbol{\epsilon}\}$$

$$\mathbf{V^k} =_{\mathbf{R}} \mathbf{V^{k-1}} \cdot \mathbf{V} \quad \text{단, } \mathbf{k} \geq \mathbf{1} \text{ 경우.}$$

문자집합 V 로 이루어진 문자열들의 전체집합(universe) $\mathbf{V}^*$를 자연수 0 부터 시작하는 자연수($\aleph_0$)를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{V}^* = \cup_{i \in \aleph_0} \boldsymbol{V^i}.$$

$$\text{단 } \forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}^*: \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}.$$

두 집합 A, B 의 크기(cardinality)가 같음($|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$)은 두 집합간에 양방향의 전단사함수(onto & 1:1)가 존재함을 보임으로 증명한다.

(1) $|\aleph_0| = |\aleph_0 \times \aleph_0|$임을 양방향 전단사함수 $\boldsymbol{f}$와 $\boldsymbol{f^{-1}}$의 식을 써서 증명하시오. (15 점)

(2) $|\boldsymbol{V}^*| = |\aleph_0|$임을 양방향 전단사함수 $\boldsymbol{f}$와 $\boldsymbol{f^{-1}}$의 식을 써서 증명하시오. (15 점)

4. 1891년 독일의 수학자 Cantor가 대각선화 주장(Cantor's diagonal argument)이라는 방법으로 자연수 보다 큰 집합(예: 무리수, 실수)이 있음을 증명하였다. 이는 고대 피타고라스의 $\sqrt{2}$의 문제를 해결한 큰 일로 본다.

(1) 자연수($\aleph_0$)의 부분집합의 집합($2^{\aleph_0}$)의 cardinality와 $\aleph_0$에서 {0,1}로 가는 함수의 집합 (무한 이진문자열, $\{0,1\}^{\aleph_0}$)의 cardinality가 같음을 문제 3과 같은 방법으로 증명하시오. (15점)

(2) 무한이진수가 countable하지 않음을 밝힌 Cantor의 증명을 완성하시오. (20점)

(증명) i) 귀류법(proof by contradiction, 강의노트 chapter 2의 page 6 참조)을 이용해 우선 $\{0,1\}^{\aleph_0}$가 countable하다고 위 명제의 결론을 부정한 후, 모순(contradiction)을 연역(deduction)함으로 $\{0,1\}^{\aleph_0}$이 uncountable함을 증명하려 한다.

ii) $\{0,1\}^{\aleph_0}$이 countable하다면, $\{0,1\}^{\aleph_0} = \{f_0, f_1, \ldots, f_i, \ldots\}$로 번호 매겨 나열할 수 있다.

iii) 이때, i-번째 무한이진수를 $f_i = (a_{i0}a_{i1}, \ldots, a_{ii}, \ldots)$로 표기할 수 있을 것이다.

iv) 대각선을 뒤집은 $\overline{f} = \{\overline{a_{00}}, \overline{a_{11}}, \ldots, \overline{a_{ii}}, \ldots\}$를 생각하자.

단, $\forall i \in \aleph_0 : \overline{a_{ii}} = 1, if\ a_{ii} = 0;$

$\overline{a_{ii}} = 0, if\ a_{ii} = 1.$

v) 이 증명을 완성하시오.

5. 집합 A 에 대해서, binary relation $\mathbf{R \subseteq A \times A}$이 equivalence relation 이라고 하자. 이때, equivalent class $\mathbf{[a]_R = \{b \in A | a\ R\ b\}}$ 라 정의하고, $\mathbf{Par_R(A) = \{[a]_R \subseteq A | a \in A\}}$ 을 equivalence relation R 에 의하여 정의된 partition 이라고 하자.

(1) 위 $\mathbf{Par_R}(A)$ 가 집합 A 의 partition(mutually disjoint(서로 소)하고 exhaustive(equivalent class 들의 합집합이 A) 한 집합의 완전한 나눔)임을 증명하시오. (15 점)

(2) 두 개의 equivalence relation $\mathbf{R_1, R_2}$ ($\mathbf{R_1, R_2 \subseteq A \times A}$)에서, $\mathbf{R_1 \subseteq R_2}$ 일 때, $\mathbf{|Par_{R_1}(A)|}$와 $\mathbf{|Par_{R_2}(A)|}$의 관계를 나타내는 식을 쓰고, 이를 증명하시오. (15 점)

6. 파스칼(Pascal)의 삼각형의 재귀적으로(Recursively) 계산하여 파스칼 피라미드의 n 번째 항을 구하는 식과 알고리즘을 쓰시오. (30 점)

(힌트)

```
             1                           1 번째 항
            / \
          1     1                        2 번째 항
         / \   /  \
        1    2    1                      3 번째 항
       /  \ /  \   / \
      1    3    3    1                   4 번째 항
     /  \  /  \  /  \ /  \
             ......                      ...
```

7. 카이스트 전산학과에서 로또 복권을 판매하기로 했다. 이 로또는 1부터 45까지의 자연수 중 6개의 숫자를 선택해 복권을 구매하고, 매주 정해진 시간에 추첨을 통해 결정된 당첨된 당첨번호 6개와 구매자가 선택한 번호가 일치하는 개수에 따라 등위를 결정하는 복권게임이다. 한편, 한 개의 번호도 당첨번호와 일치하지 않은 복권을 가져오면 위로의 의미로 인기가수 아이유가 출현하는 열린음악회의 초대권과 바꿔주는 이벤트를 하기로 했다.

(1) 이산구조의 강진 조교는 임의의 번호 6개를 선택해 복권을 한 장 샀다. 이 때, 선택된 번호들이 단 한 개의 당첨번호와도 일치하지 않아 강진 조교가 열린음악회 초대권을 받을 수 있을 확률을 수식으로 표현하시오. (10점)

(2) 이산구조의 이동진 조교는 꼭 아이유를 보기 위해 여러 장의 복권을 사려고 한다. 다만, 이동진 조교는 가능한 한 적은 비용을 들여서 사고자 한다. 이동진 조교가 최소한 한 개의 복권이라도 확실히 당첨번호가 일치하지 않음을 보장하기 위해서는 최소한 몇 장의 복권을 사야 하는가? 어떻게 번호를 선택해야 하는가? (15점)