Homework 3 Solution

1. 실수의 집합은 자연수의 집합보다 크기가 큼을 증명하시오.

실수의 집합의 크기가 자연수의 집합의 크기와 같다고 가정한다. 그렇다면 R의 부분집합인 [0,1) N이 일대일 가능이 가능해야 한다. 자연수에서 [0,1)로의 bijection f가 존재한다면 다음과 같은 대응을 만들 수 있다.

f(0) = 0

f(1) = $0.\mathrm{n}_{11}n_{12}n_{13}\ldots$

f(2) = $0.\mathrm{n}_{21}n_{22}n_{23}\ldots$

f(3) = $0.\mathrm{n}_{31}n_{32}n_{33}\ldots$

이 대응으로부터 x = $0.\mathrm{n}_{11}n_{22}n_{33}\ldots$를 만들 수 없다. 이 수 역시 [0,1) 범위 안에 들어있다.

이 x를 이용해 다음과 같은 x'을 만들어도 범위를 만족한다.

x' = $0.\mathrm{n}_{11}{}'n_{22}{}'n_{33}{}'\ldots,\quad n_{ii}' = (n_{ii}+1)\ mod\ 10$

그런데 이 x'는 임의의 자연수 i에 대해, $n_{ii}'! = n_{ii}$가 성립하기 때문에 어떠한 f(i) 와도 일치하지 않는다. 따라서 자연수의 집합의 크기보다 실수의 집합의 크기가 더 크다. 이를 Cantor의 대각선 논법이라고 하고, 다양한 증명에서 사용된다.

2. R이 집합 A에 대한 relation이다. 이 때, R이 antisymmetric함과 이$R \cap R{-1} \subseteq (a,a) : a \in A$이 동치임을 증명하시오.

(1) R이 antisymmetric이면 R ∩R−1 ⊆ {(a, a) : a ∈ A}.

R ∩R−1안의 임의의 원소 (x,y)를 생각하자. 이 원소는 R−1에 들어있을 것이다. 이 때 R−1의 정의에 의해, (y,x)가 R에 존재해야 한다. 따라서 (x,y)와 (y,x)가 전부 R에 들어있고, R이 antisymmetric하기 때문에 x=y인 경우만 가능하다. 따라서 R∩R−1안의 임의의 원소 (x,y)의 순서쌍의 x와 y는 항상 동일하다. 따라서 R ∩R−1 ⊆ {(a, a) : a ∈ A}

(2) R ∩R−1 ⊆ {(a, a) : a ∈ A}이면 R이 antisymmetric하다.

(x,y)와 (y,x)가 R에 동시에 존재하는 임의의 x,y를 생각하자. (x,y)가 R에 존재하므로 R−1에 항상 (y,x)가 존재한다. 따라서 (y,x)은 항상 R ∩R−1 에 존재해야 하는데, R ∩R−1의 원소는 {(a, a) : a ∈ A}에 포함되어 하므로, (x,y)와 (y,x)가 동시에 R에 존재하는 경우는 항상

x=y일 때이다. 따라서 R은 antisymmetric하다.

3. 육십 갑자는 앞 글자인 10간(갑,을,병,정,무,기,경,신,임,계)과 뒷글자 12지(자,축,인,묘,진,사,오,미,신,유,술,해) 조합으로 만들어지는 주기이다. 1년이 지날 때마다 10간과 12지에서 순서에 맞게 바뀐다. 예를 들면, 계사년에서 1년 뒤는 갑오년이고, 2년 뒤는 을미년이다. 올해 2013년이 계사년이라는 사실을 이용하여, 임의의 서기 N년이 육십 갑자로 어떤 연도가 될지, mod함수를 이용해 의사 코드로 알고리즘을 만드시오

```
육십 갑자 (N)
{
        간 = [갑,을,병,정,무,기,경,신,임,계]
        지 = [자,축,인,묘,진,사,오,미,신,유,술,해]
        return 간[(N-2013+9) mod 10] 지[(N-2013+5) mod 12] 년
}
```