Homework2

1. (5 points) Denotes the symmetric difference operator defined as $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$, where A and B are sets.
(Don't use Venn diagram or disjunctive normal form in proof.)

1.1 Prove $(A \triangle B) \triangle A = B$ for all sets A and B.

$$
\begin{aligned}
&(A \triangle B) \triangle A = ((A \cup B) - (A \cap B)) \triangle A \\
&= ((A \cup B) - (A \cap B)) \cup A - ((A \cup B) - (A \cap B)) \cap A \\
&= ((A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})) \cup A - ((A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})) \cap A \\
&= ((A \cup B) \cap (True \cup \overline{B})) - (A \cap (False \cup \overline{B})) \\
&= (A \cup B) - (A \cap \overline{B}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = B
\end{aligned}
$$

1.2 Prove or disprove: $A \triangle (B - C) = (A \triangle B) - (A \triangle C)$ for all sets A,B, and C.

False. Let A={1,2,3} B={2,3,4} and C={3,4}. Then $A \triangle (B - C) = \{1, 3\}$ and $(A \triangle B) - (A \triangle C) = \varnothing$.

2. (10 points) Find recursive definition of $-: \aleph_0 - \aleph_0 \rightarrow Z$(infix notation) with successor function σ and predecessor function ρ. Test it with '1 - 3'. Also, explain how to change definition to satisfy '1 - 3 = 0'.

Recursive definition

basis $\forall n \in \aleph_0 : n - 0 =_B n$

recursion $\forall n \in \aleph_0, \forall m \in \aleph_0 : n - \sigma(m) =_R \rho(n - m)$

Test

$$
\begin{aligned}
1 - 3 &= 1 - \sigma(2) =_R \rho(1 - 2) = \rho(1 - \sigma(1)) =_R \rho(\rho(1 - 1)) \\
&= \rho(\rho(1 - \sigma(0)) =_R \rho(\rho(\rho(1 - 0))) =_B \rho(\rho(\rho(1))) = -2
\end{aligned}
$$

Change the range from Z to $\aleph_0$, then

$\rho(0) = 0$, so $_B\, \rho(\rho(\rho(1))) = \rho(\rho(0)) = \rho(0) = 0$

3. $\aleph_0$은 0을 포함한 자연수의 집합이다. $|\aleph_0 \times \aleph_0| = |\aleph_0|$임을 증명하고, 전단사함수(bijection) f f_1: $\aleph_0 \rightarrow \aleph_0 \times \aleph_0$과 f f_2: $(\aleph_0 \times \aleph_0) \rightarrow \aleph_0$를 각각 제시하시오. (10점)

수업시간에 교수님이 설명하셨던 것처럼,
0 = (0,0)
1 = (0,1)
2 = (1,0)
3 = (0,2)
4 = (1,1)
5= (2,0)

이를 만족하는 bijection이 존재하기 때문에 $|\aleph_0 \times \aleph_0| = |\aleph_0|$가 된다. (4점)

우선,
$f_2(m,n) = \dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ 라는 것을 어렵지 않게 찾을 수 있다. (3점)

반대방향은 다음과 같은 과정을 거쳐 구할 수 있다.
m+n= l 은 $\dfrac{l(l+1)}{2} \leqq x < \dfrac{(l+1)(l+2)}{2}$를 만족하는 최대 자연수이다.
계산해서 구하면, $l = \lfloor \dfrac{\sqrt{8x+1}-1}{2} \rfloor$가 나온다.
(구하지 않고 최대 자연수라는 것을 명시만 해두어도 괜찮음)
$t = \dfrac{l(l+1)}{2}$
$f_1(x) = (x-t, l+t-x)$ (3점)
(m,n 좌표를 반대로 생각하고 풀거나 다른 방법의 mapping을 사용했어도 올바른 함수를 제시했다면 정답 처리, m,n,x가 0일 가능성을 생각하지 않았거나, 부등호의 등호의 위치를 실수했을 경우 부분 점수 1점)