KAIST 전산학과 최광무

9-2 Equivalent Relation and Partial Order

(정의 1) 집합 A에서 정의한 관계 $R \subseteq A \times A$에서, 관계 R이 reflexive하고, symmetric하고 transitive하면 동등(equivalent) 관계라 한다.

(정의 2) 집합 A에서 정의한 관계 $R \subseteq A \times A$에서, $a \in A$에 동등관계 R로 정의한 동등 클래스(Equivalent Class) $[a]_R$을 a과 R관계가 있는 원소들의 집합으로 정의한다.

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$$

(사실 1) 동등관계(equivalent relation) $R \subseteq A \times A$에서 $\forall a \in A$에 대하여 $a \in [a]_R$이다.

(정리 1) 집합 A에서 정의한 관계 $R \subseteq A \times A$에서, a, $b \in A$에 대하여
aRb 이면 $[a]_R = [b]_R$이고, $a \not R b$ 이면 $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$.

(정리 2) 등등 클래스들의 집합이 분할(partition)을 이룬다.
$Par_R(A) \overset{\text{def}}{=} \{[a]_R \mid a \in A\} = A$, $\forall B, C \in Par_R(A)$: $B \cap C = \varnothing$.
$|Par_R(A)|$를 동등관계 R의 차수(order)라고 부른다.

(숨은 정의) 분할(partition) 집합 A에 분할 $Par(A) = \{A_1, A_2, \cdots A_k\}$을 아래로 정의한다.

(1) $1 \le \forall i \le n$: $A_i \subseteq A$.

(2) $1 \le \forall (i \ne j) \le n$: $A_i \bigcap_{1 \le \forall (i \ne j) \le n} A_j = \varnothing$.

(3) $1 \le \forall i \le n$: $\bigcup_{1 \le i \le n} A_i = A$.

$|Par(A)| = k$.

(예 1) $= \overset{\text{def}}{=} \{(n,n) \in \aleph \times \aleph \mid n \in \aleph\}$. $= \subseteq \aleph \times \aleph$는 동등관계이다.

(증명) 1) $\forall n \in \aleph$, $n = n$.
2) $\forall n, m \in \aleph$, $n = m \Rightarrow m = n$.
3) $\forall n, m, l \in \aleph$, $n = m \wedge n = l \Rightarrow m = l$.
$|=| = |\aleph|$.

(사실 2) id_A는 동등관계이고, $Par_R(A) = \{\{a\} \mid a \in A\}$이므로 $|Par_R(A)| = |A|$이다.

(사실 3) $A \times A$도 동등관계이고, $Par_R(A \times A) = \{A\}$이므로 $|Par_R(A \times A)| = 1$이다.

(생각문제 1) 두 개의 동등관계(equivalent relation) R_1, $R_2 \subseteq A \times A$에서 $R_1 \subseteq R_2$이면 $Par_{R_1}(A)$과 $Par_{R_2}(A)$는 어떤 관계를 가질까?

(주요 사실) $|A| = n$일 때, $R \subseteq A \times A$의 복잡도는 $O(n^2)$이지만 동등관계 R의 복잡도는 $O(n)$이다.

(정의 3) 집합 A에서 정의한 관계 $R \subseteq A \times A$에서, 관계 R이 antisymmetric[1]하고 transitive하면 순서(partial order)라 하고, 집합 A와 관계 R의 순서쌍 (A, R)을 순서집합(partially orders set, poset)이라고 부른다.

(예 2) $< \overset{\text{def}}{=} \{(n,m) \in ℵ \times ℵ \mid n < m\}$과 $\leq \overset{\text{def}}{=} \{(n,m) \in ℵ \times ℵ \mid n \leq m\}$순서이다.
$\leq \ = (< \ \cup \ =)$

(증명) 1) $\forall n,\ m \in ℵ,\ n < m \Rightarrow m \not< n.$
2) $\forall n,\ m,\ l \in ℵ,\ n < m \ \wedge \ m < l \Rightarrow n < l.$

(정의 4) 집합 A에서 정의한 순서 $R \subseteq A \times A$에서
$\forall (a,b) \in A \times A$: $(a,b) \in R$ 혹은 $(b,a) \in R$이면 순서 R을 전순서(total order) 라고 부른다.

(사실 4) $(ℵ, <)$에서 순서 $<$는 irreflexive partial order이고 순서집합이고,
$(ℵ, \leq)$에서 순서 $\leq$는 reflexive partial order이고 전순서집합이다.

(예 3) 자연수 $ℵ$에 대하여 $(ℵ, |)$는 순서집합이고,
임의의 집합 S에 관하여 $(2^S, \subseteq)$도 순서집합이다.

<u>격자(Lattice)</u>

(생각문제 2) 순서 $(ℵ, \leq)$에서 정의된 이진(binary)함수 최대, 최소: $ℵ \times ℵ \rightarrow ℵ$를 생각하자.
순서 $(ℵ, |)$에서 정의된 함수 최대공약수, 최소공배수: $ℵ \times ℵ \rightarrow ℵ$를 생각하자.
순서 $(2^S, \subseteq)$에서 정의된 함수 $\cup$, $\cap$: $2^S \times 2^S \rightarrow 2^S$를 생각하자.

1) 관계 R을 asymmetric으로 정의하였다면, $<$은 순서(partial order)가 안 된다.