KAIST 전산학과 최광무

9-1 관계(relation)와 함수(function)

<u>관계(Relation)는 곱집합(Cartesian product)의 부분집합</u>

(정의) 집합   에서 B로 가는(from A to B) **관계**(relation) R은 두 집합 A와 B의 **곱집합의 부분집합**으로 정의한다.

$$R \quad A \times B \tag{7}$$

이때 집합 A를 관계 R의 **정의역**(domain), B를 **치역**(range; co-domain)이라 부른다. $(a,b) \quad R$일 때 aRb[1]로 쓰고 $(a,b) \not\in R$일 때 aRb쓰기도 한다.

(뻔한사실) $\varnothing$과 $A \times B$도 관계이다.

(생각문제) $R \subseteq A \times B$일 때, 서로 다른 관계 R은 모두 몇 개일까?

(정의) 집합 A에서 B로 가는 관계 R의 역관계 $R^{\ 1} \subseteq B \times A$를 아래로 정의한다.

$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$

(정의) 관계 R의 정의역과 치역이 같은 집합 A일 때 관계 R은 집합 A에서 정의한(on A) 관계라 부른다.

$$R \subseteq A \times A \tag{8}$$

(정의) 집합 A에서 정의한 관계 $E \subseteq A \times A$를 에지로 표현한 순서쌍 $G = (A, E)$을 집합 A의 그래프라고 정의한다.

<u>자연수의 집합 N에서 정의한 관계</u>$(=, <, \leq)$

$= \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{(a,b) \in \aleph \times \aleph \mid a = b\}$

$(3,3) \in =$이고 $3=3$으로도 쓴다. $\qquad (3,4) \not\in =$이고 $3 \neq 4$으로도 쓴다.

$< \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{(a,b) \in \aleph \times \aleph \mid a < b\}$

$(3,4) \in <$이고 $3<4$으로도 쓴다. $\qquad (3,3) \ <$이고 $3 \not< 3$으로도 쓴다.

$\leq \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{(a,b) \in \aleph \times \aleph \mid a < b \ \vee \ a = b\} = (< \cup =)$

$(3,3) \in \leq$이고 $3 \leq 3$으로도 쓴다. $\qquad (3,4) \in \leq$이고 $3 \leq 4$으로도 쓴다.

$(4,3) \not\in \leq$이고 $4 \leq 3$으로도 쓴다.

<u>관계의 성질</u>

$R \subseteq A \times A$일 때,

1) $\forall a \in A$: aRa일 때. R이 거울(reflexive)이다.
   $\forall a \in A$: $a \not R a$일 때. R이 반거울(ir-reflexive)이다.

2) $aRb \Rightarrow bRa$일 때, R이 대칭(symmetric)이다.
   $aRb \Rightarrow b \not R a$일 때, R이 반대칭(asymmetric)이다.
   $aRb \wedge a \neq b \Rightarrow b \not R a$일 때, R이 비대칭(antisymmetric)이다.

3) $aRb \ \wedge \ bRc \Rightarrow aRc$일 때, R이 이행(?)(transitive)이다.

<u>관계에 성질(property)과 그래프</u>

집합 A에서 정의한 관계 R을 에지로 하는 그래프 $G = (A, R)$에서, 관계 R이 특별한 성질을 만족할 때 그래프를 간단히 그릴 수 있다.

---

1) R: $A \times B \rightarrow \{\ \ , \boldsymbol{F}\}$

(1) 관계가 **reflexive**[2]하면, 모든 노드에서 자기 자신으로 가는 에지(self edge)가 **항상 있고**, **irreflexive**하면 self edge가 **항상 없으므로**, 관계가 reflexive인지 irreflexive인지를 미리 알고 있다면, 그래프에서 self edge는 따로 표시하지 않을 수 있다.

(2) **Symmetric**하면 에지가 양방향으로 모두 있으므로 에지에 화살표를 따로 표시할 필요가 없다(undirected graph). **Antisymmetric** 또는 **asymmetric**하면 한 방향으로만 에지가 있는 것이므로, 에지에서 화살표를 뺀 방향 없는(undirected) 그래프로 간단하게 표현할 수도 있다. 다만 양방향으로 에지가 있는 symmetric의 경우는 문제가 없으나, 한 방향으로만 에지가 있는 antisymmetric이나 asymmetric일 때는 에지가 출발하는 노드를 위쪽에 그려서 그래프로 표현하기도 한다(예: 뿌리 나무(rooted tree)).

(3) **Transitive**하면, 처음 노드에서 마지막 노드로 중간 노드를 통하여 에지가 연결하면, 반드시 처음 노드에서 마지막 노드로 에지가 직접 있는 경우이다[3]. 모든 연결을 다 표시하는 것은 낭비이고 기본적인 도시 연결 상황만을 나타내면 충분하고, 이 기본적인 연결 상황을 Hasse diagram이라 부른다.

(예) 자연수의 집합 에서 정의한 관계의 예(, <, ≤)

$=$은 reflexive, symmetric, transitive

$<$은 ir-reflexive, asymmetric, antisymmetric, transitive

$\leq$은 reflexive, antisymmetric, transitive

(정의) 집합 정의역과 치역이 같은 집합 A에서 정의한 관계 R은 **합성**(composition 또는 **곱**(product))이 쉽게 정의되므로 관계 R이 여러(n)번 계속 곱하여지는 **반복곱** R ($n \geq 0$)을 아래와 같이 **recursive**하게 정의한다.

$R^0 \overset{\text{def}}{=}_{\text{B}} id$ 단 $id_A = \{(a,a) | a \quad A\}$[4].

$R^n \overset{\text{def}}{=}_{\text{R}} R^{n-1} \circ R$ $n \geq 1$. (9)

<u>관계의 p-closure</u>

집합 A안에 있는 관계 R과 관계 R의 성질의 집합 $P = \{reflexive, symmetric, transitive\}$의 원소 $p \in P$의 $p-closure$ R'을 아래와 같이 정의한다.

$R' \supseteq R$을 만족하는 집합 A안에 있는 관계 중에 성질 $p \in P$를 만족하는 **가장 적은** 관계이다.

(정의) $A \subseteq B$일 때 집합 A가 집합 B보다 적거나 같다고 한다.

(예) Reflexive closure of R, $R' = R \cup id_A$.

Symmetric closure of R, $R' = R \cup R^{-1}$.

Transitive closure of R, $R \quad = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \bigcup_{i \in} R^i$.

---

2) 관계의 성질인 i) reflexive와 irreflexive, ii) symmetric과 asymmetric antisymmetric, iii) transitive에 정확한 정의는 TP나 이산수학 교과서를 참조하시오.

3) $R \ is \ transitive. \overset{\text{def}}{=} \forall a,b,c \in A: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc.$

4) $\forall R \subseteq A \times A$: $R \circ id_A = id_A \circ R = R$. id_A는 합성($\circ$)에 관한 항등원(identity element)이다.

Reflexive and transitive closure of , R = R^0 $R^1 \cup R^2 \cup \cdots$ = $\;_{i}\;$ R^i.

<u>함수(function)</u>

(정의) 집합 A에서 B로 가는 **관계** f중 (1) A의 **모든**(total) 원소 a A에 대하여 관계 afb(또는 $(a,b)\in f$)가 있는 $b\in B$가 반드시 (2) **하나씩**(unique) 있는 경우, 관계 f를 **집합 A에서 B로 가는 함수** f라 부르고,

$$f: A \to B$$

로 표시하며 특히 afb 또는 $(a,b)\in f$ 대신 $f(a)=b$로 표시하기도 한다. 이 때 집합 A를 함수 f의 정의역(domain) 집합 B를 함수 f의 치역(range)이라 한다.

$f: A \to B$, if $\quad (f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a \in A: \exists_1 b \in B: afb)$

위의 조건 (1) 정의역에 모든 …은 만족하지 않지만 (2) 치역에 하나만 …은 만족할 때 관계 f를 부분함수(partial function)라 부르고,

$f: A \mapsto B$, if $\quad (f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a \in A: [(\exists_1 b \in B: afb) \wedge (\nexists b \in B: afb)])$[5)]

(1) (2)를 모두 만족하는 함수를 전체함수(total function)라 부르기도 한다.

$f: A \to B$, if $\quad (f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a \in A: \exists_1 b \in B: afb)$

함수 $f: A \to B$의 역함수 $f^{-1}: B \to A$는 함수가 **아니고 관계**다. f^{-1}가 함수가 되려면,

(1) 정의역 B에 모든 …을 만족해야 하고, 즉

$\forall b \in B: \exists a \in A:\ afb$ 또는 $\forall b \in B: \exists f^{-1}(b) \in A$이면

함수 $f: A \to B$는 onto 함수(correspondence) 또는 surjection(전사함수)라 부르고,

$|A| \geq |B|$이다.

(2) 치역 A에 하나만 …도 만족해야 한다. 즉

$\forall a \in A: \exists_1 b \in B: afb$ 또는 $b \in B: \exists_1 f^{-1}(b) \in A$이면

함수 $f: A \to B$는 one-to-one(1:1) 함수 또는 injection(단사함수)라 부르고,

$|A| \leq |B|$이다.

함수 $f: A \to B$의 역함수 $f^{-1}: B \to A$도 함수이면 함수$f: A \to B$는 one-to-one onto 함수(1-1 correspondence; **짝짓기**) 또는 bijection(전단사함수)이라 부르고

$|A| = |B|$이다.

<u>집합에 동등(isomorphism[6)])</u>

(정의) $A \cong_f B \overset{\text{def}}{=} (\exists f:\ A \to B \wedge \exists f^{-1}: B \to A)$.

$\equiv \exists f:\ A \leftrightarrow B$.

$A \cong_f B$일 때, $|A| = |B|$이고 집합 A와 집합 B는 함수 f를 통하여(with respect to; w.r.t.) 동등(isomorphic)하다고 한다. 집합 A와 집합 B가 **짝짓기**함수 f를 통하

5) 부분함수의 조건을 $|f(a)| \leq 1$로 쓰는 책도 있다.

6) Equivalent(같음; same)와 구분하기위하여 isomorphism(동등)이라는 다른 용어를 사용하였다.

여 동등하다는 말은, $f(A)$로 $A = f^{\ 1}(B)$로 나타낼 수 있기 때문이다.
짝짓기 함수[7] f를 생략하고 $A \cong B$로 간단히 쓸 수도 있다.

(정의) $|A| = |B| \overset{\text{def}}{=} A \cong B.$
두 집합이 동등할 때($\cong$) 두 집합이 크기(cardinality)가 같다고 정의한다.

(예) $\{a, b, c\} \neq \{1, 2, 3\}$ 이지만 $\{a, b, c\} \cong_f \{1, 2, 3\}$이다. 이 때 짝짓기 함수 f는 무엇일까? 물론 집합의 크기는 $|\{a, b, c\}| = |\{1, 2, 3\}| = 3$으로 같다.

집합의 동등함($\cong$)은 집합의 같음($=$)을 포함하는($\supseteq$) 더 큰 개념이다.
(예) 학생 집합과 그 학생의 학번집합은 같지($\subseteq$, $\supseteq$)는 않지만 동등하다($\cong_f$).

<u>멱집합(Power Set)</u>

(정의) 집합 A의 부분집합의 집합을 집합 A의 멱집합(power sets)이라 부르고 2 로 쓴다.
$2^A \overset{\text{def}}{=} \{B | B \subseteq A\}.$

(예) $2^{\{0,1,2\}} = \{\ \varnothing,\ 0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\ \}.$

(사실) $|2^A| = 2^{|A|}.$

(증명) 생략.

(정의) 집합 A에서 B로 가는 함수의 집합을 B^A라 쓴다.
$B^A \overset{\text{def}}{=} \{f |\ f : A \to B\}.$

(예) $\{T, F\}^{\{0,1,2\}} \overset{\text{def}}{=} \{$
$\{(0, F), (1, F), (2, F)\}, \{(0, F), (1, F), (2, T)\}, \{(0, F), (1, T), (2, F)\}, \{(0, F), (1, T), (2, T)\},$
$\{(0, T), (1, F), (2, F)\}, \{(0, T), (1, F), (2, T)\}, \{(0, T), (1, T), (2, F)\}, \{(0, T), (1, T), (2, T)\}\ \}$
$\cong \{\ (F_0F_1F_2),\ (F_0F_1T_2),\ (F_0T_1F_2),\ (F_0T_1T_2),$
$(T_0F_1F_2),\ (T_0F_1T_2),\ (T_0T_1F_2),\ (T_0T_1T_2)\ \}$
$\cong \{\ 000_2,\ 001_2,\ 010_2,\ 011_2,\ 100_2,\ 101_2,\ 110_2,\ 111_2\ \}$

(사실) $|B^A| = |B|^{|A|}.$

(증명) 생략.

(정의) 집합 A가 유한하면 $B^A \cong B^{|A|}$이므로, B^n(단 $|A| = n$)으로 간단히 쓰기도 한다.

(예) $\{T, F\}^{\{0,1,2\}} \cong \{T, F\}^{\{a,b,c\}} \cong \{0, 1\}^{\{1,2,3\}} \cong \{0, 1\}^3$

(사실) B^n는 $|B|$-진수[8] 길이 n짜리 문자열(string)[9]이다.

(사실) 집합 A에 멱집합 2^A은 집합 A에서 집합 $\{0, 1\}$로 가는 함수와 동등하다.
$2^A \cong \{0, 1\}^A.$

(예) $A = \{0,1,2\}$일 때, $2^A = \{\ \varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0,1,2\}\ \}$

---

7) 짝짓기 함수는 1-1 onto 함수를 뜻한다.
8) n-진수는 n-진법을 말하는 것으로 위에 예는 이진수(binary number) 문자열이다.
9) 문자열(string)은 1-3에서 다시 자세히 다룬다.

$$\{\ 0_0 0_1 0_2,\ 0_0 0_1 1_2,\ 0_0 1_1 0_2,\ 0_0 1_1 1_2,\ 1_0 0_1 0_2,\ 1_0 0_1 1_2,\ 1_0 1_1 0_2,\ 1_0 1_1 1_2\ \}$$

$\varnothing \leftrightarrow_f 0_0 0_1 0_2$, $0\} \leftrightarrow_f 1_0 0_1 0_2$, $\{1\} \leftrightarrow_f 0_0 1_1 0_2$, $\{2\} \leftrightarrow_f 0_0 0_1 1_2$,
$\{0,1\} \leftrightarrow_f 1_0 1_1 0_2$, $\{0,2\} \leftrightarrow_f 1_0 0_1 1_2$, $\{1,2\} \leftrightarrow_f 0_0 1_1 1_2$, $\{0,1,2\} \leftrightarrow_f 1_0 1_1 1_2$.

(증명) $= \{1, 2, \cdots, n\}$라 하자, $b_1 b_2 \cdots b_n$ $\{0,1\}^n$(단 $1 \leqq \forall i \leqq n$: $b_i \in \{0,1\}$)
$b_1 b_2 \cdots b_n \leftrightarrow_f \{i \in A|\ 1 \leqq \forall i \leqq n: b_i = 1$

<u>관계를 함수로 표기하기</u>

관계 $R \subseteq A \times B$이고 $a \in A$에 대하여 aRb_1, aRb_2, $\cdots$, aRb_k일 때,

$R(a) = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\} \subseteq B$로 쓰기도 한다.

단 $k \geqq 0$이고, $k = 0$이면 $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\} = \varnothing$이라 본다.

이 때 $R: A \rightarrow 2$ 으로 볼 수도 있다[10].

즉 관계 $R \subseteq A \times B$을 정의역이 집합 A이고, 치역이 집합 B의 **부분집합**으로 하는 **함수**(**set valued function**)로 볼 수도 있다[11].

<u>진리집합과 필요, 충분조건</u>

(정의) 전체집합이 U인 조건명제 $p(x)$에 **진리집합이** $P = \{x \in U|\ p(x)\}$이고 조건명제 $q(x)$에 진리집합이 $Q = \{x \in U|\ q(x)\}$일 때, $P \subseteq Q$이면 $\forall x \in U$: $p(x) \Rightarrow q(x)$[12]이고, 조건명제 $p(x)$는 조건명제 $q(x)$가 만족하기 위한 **충분조건**이라 부르고, 거꾸로 조건명제 $q(x)$는 조건명제 $p(x)$가 만족하기 위한 **필요조건**이라고 부른다. 또 $P \subseteq Q \wedge P \supseteq Q$, 즉

---

10) $R_1 \subseteq A \times B$이고 $R_2: A \rightarrow 2^B$이라고 할 때 $R_1 \leftrightarrow R_2$이고 $R_1 \cong R_2$이므로 $R_1 = R_2$로 볼 수 있다.
11) 관계 R은 함수인가 함수가 아닌가?
12) 전체집합 U가 명백하면 $p \Rightarrow q$로 짧게 쓰기도 한다.