KAIST 전산학과 최광무

8-1 점화관계(Recurrence Relation)

8.1 점화관계(점화식; Recurrence Relation)의 소개

수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n을 n보다 적은 k개에 항 a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots$, $a_{n-k}(k \ge 1)$으로 표기하는 것을 점화관계(recurrence relation)라 한다.

$\forall\, n \ge k$: 점화식 $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k})$과 k개에 초기조건 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$을 알면

$\forall\, n \ge 0$에서 수열 $\{a_n\}$은 **정의**된다.

(예 1) 복리 금 P_n은 지난해 원금 P_{n-1}과 복리이자 rP_{n-1}에 합이다.

$\forall\, n \ge 1$: $P_n = P_{n-1} + rP_{n-1} = (1+r)P_{n-1}$이고 $P_0 = X$이다.

이를 차례로 계산하면,

$P_0 = X$

$P_1 = (1+r)P_0 = (1+r)X$

$P_2 = (1+r)P_1 = (1+r)(1+r)X = (1+r)^2 X$

$\cdots$

$P_i = (1+r)P_{i-1} = (1+r)(1+r)^{i-1}X = (1+r)^i X$ 귀납 가정

$P_{i+1} = (1+r)P_i = (1+r)(1+r)^n X = (1+r)^{i+1} X$ 귀납 증명

$\forall\, n \ge 0$: $P_n = (1+r)^n X$. 점화관계의 해

(예 2) n-하노이의 탑(Tower of Hanoi)에 옮기는 수 H_n

$H_1 = 1$

$H_2 = 1 + 1 + 1 = 3$

$= H_1 + 1 + H_1$

$H_3 = H_2 + 1 + H_2 = 3 + 1 + 3 = 7$

$H_4 = H_3 + 1 + H_3 = \cdots$

$\forall\, n \ge 2$: $H_n = 2H_{n-1} + 1$이고 $H_1 = 1$. 점화관계를 가정

$H_n = 2H_{n-1}+1$

$= 2(2H_{n-2}+1)+1$

$= 2(2(2H_{n-3}+1)+1)+1$

$= 2^3 H_{n-3} + 2^2+2^1+2^0$

$\cdots$

$= 2^k H_{n-k} + 2^{k-1}+2^{k-2}+ \cdots +2^1+2^0$

$= 2^k(2H_{n-k-1}+1) + 2^{k-1}+2^{k-2}+ \cdots +2^1+2^0$ 귀납 가정

$= 2^{k+1} H_{n-k-1} + 2^k+2^{k-1}+ \cdots +2^1+2^0$ 귀납 증명

$\cdots$ 일반해 찾기 $H_1 = 1$이므로 $2^{k+1}H_{n-k-1}$에서 $n-k-1=1$이려면 $k=n-2$이고,

또는 $2^k H_{n-k}$에서 $n-k=1$이려면 $k=n-1$이다.

$= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2}+2^{n-3}+ \cdots +2^1+2^0$

$= 2^{n-1}+2^{n-2}+ \cdots +2^1+2^0 = 2^n - 1$.

$\forall\, n \ge 1$: $H_n = 2^n - 1$. 수열 $\{H_n\}$에 일반해

(예 3) 피보나치(Fibonacci) 수열(무인도에 떨어진 토끼 한 쌍)

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$이고 $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

$f_0 = 0$ $\qquad$ $f_1 = 1$

$f_2 = f_1 + f_0 = 0 + 1 = 1.$ $\qquad$ $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2.$

$f_4 = f_3 + f_2 = 1 + 2 = 3.$ $\qquad$ $f_5 = f_4 + f_3 = 2 + 3 = 5.$

$f_6 = f_5 + f_4 = 3 + 5 = 8.$ $\qquad$ $f_7 = f_6 + f_5 = 5 + 8 = 13.$

$f_8 = f_6 + f_5 = 8 + 13 = 21.$ $\qquad$ $f_9 = f_8 + f_7 = 21 + 13 = 34.$

$f_{10} = f_9 + f_8 = 34 + 21 = 55.$ $\qquad$ $f_{11} = f_{10} + f_9 = 55 + 34 = 89.$

… 일반해???

8.2 선형(Linear) 재귀관계의 해법

1차 선형관계의 일반해 찾기

(생각 2-0) $\forall n \geq 1$에서 점화식 $a_n = \alpha a_{n-1}$이고, 초기조건 a_0일 때, $\forall n \geq 0$에서 일반해는?

$$a_1 = \alpha a_0 = a_0 \alpha,$$

$$a_2 = \alpha a_1 = \alpha \alpha a_0 = a_0 \alpha^2,$$

$$a_3 = \alpha a_2 = \alpha a_0 \alpha^2 = a_0 \alpha^3,$$

(가정) $\forall n \geq 0$에서 일반해는 $a_n = a_0 \alpha^n$이다.

(증명) $a_n = a_0 \alpha^n$이면, $a_{n+1} = \alpha a_n = \alpha a_0 \alpha^n = a_0 \alpha^{n+1}$. 귀납증명 끝[1)]

(정리 2-0) $\forall n \geq 1$에서 점화식 $a_n = \alpha a_{n-1}$이고, 초기조건 a_0일 때,

$\forall n \geq 0$에서 일반해는 $a_n = a_0 \alpha^n$이다.

(예 1 복리이자) $\forall n \geq 1$에서 $P_n = (1+r) P_{n-1}$ 이고 $P_0 = X$.

(공식의 적용) $\alpha = (1+r)$이고 $P_0 = X$이다. 일반해는 $P_n = X(1+r)^n$.

(예 2) n-하노이의 탑(Tower of Hanoi)의 옮기는 수 H_n

$H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1$[2)]. 단 $H_1 = 1$.

특정방정식 $x^n - 2x^{n-1} = 1$에서 x^{n-1}으로 양변을 나누어도 우변이 0이 아니므로 비동형(Non homogeneous)이라고 부른다.

(생각 2-0') $\forall n \geq 1$에서 비동형 점화관계 $a_n = \alpha a_{n-1} + b$와 초기조건이 a_0에서,

$\forall n \geq 0$에서 일반해는?

$a_n = a_0 \alpha^n + c$이고, 상수 $c \in \boldsymbol{R}$은 초기조건 a_0와 α, b에서 구한다.

(생각) $a_1 = \alpha a_0 + b = a_0 \alpha + b$,

$$a_2 = \alpha a_1 + b = \alpha(a_0 \alpha + b) + b = a_0 \alpha^2 + b\alpha + b = a_0 \alpha^2 + b(\alpha + 1),$$

$$a_3 = \alpha a_2 + b = \alpha(a_0 \alpha^2 + b(\alpha+1)) + b = a_0 \alpha^3 + b(\alpha^2 + \alpha + 1),$$

1) Basis의 증명이 없음에 유의하자.
2) 1차 비동형(nonhomogeneous) 점화관계이다.

…

(가정) $a_n = a_0\alpha^n + b(\alpha^{n-1} + \cdots + \alpha + 1) = a_0\alpha^n + b\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k$이라 가정

(증명) $a_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \alpha a_n + b = \alpha\left[a_0\alpha^n + b\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\right] + b$ a_n에 귀납가정을 대입

$= a_0\alpha^{n+1} + b\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k + b$

$= a_0\alpha^{n+1} + b\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k$. 귀납증명 끝

(정리 2-0‘) $\forall n \geq 1$에서 비동형 1차 점화관계 $a_n = \alpha a_{n-1} + b$와 초기조건이 a_0이면,

$\forall n \geq 0$에서 일반해는 $a_n = a_0\alpha^n + b\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k$이다.

(공식 2-0‘의 적용1) 하노이 탑 $H_n = 2H_{n-1} + 1(n \geq 1)$, $H_1 = 1$을 생각하자,

$\alpha = 2$이고, $b = 1$이므로 일반항 $H_n = 1 \cdot 2^n + 1\sum_{i=0}^{n-1}2^i = 2^n + \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$.

(공식 2-0‘의 적용2) 점화식 $a_n = a_{n-1} + b$이고 초기조건 a_0에서

일반해 $a_n = a_0 1^n + b\sum_{i=0}^{n-1}1^i = bn + a_0$이다.

(정리 2-0“) $\forall n \geq 1$에서 비동형 1차 점화관계 $a_n = \alpha a_{n-1} + b$와 초기조건이 a_0이면,

$\forall n \geq 0$에서 일반해는 a_n은 $\alpha \neq 1$이면 $a_n = a_0\alpha^n + b\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$이고

$\alpha = 1$이면 $a_n = bn + a_0$이다.

$\forall n \geq 1$에서 점화식이 $a_n = \alpha a_{n-1} + bn + c$이고, 초기조건이 a_0일 때,

$\forall n \geq 0$에서 a_n?

$a_1 = \alpha a_0 + 1b + c = \alpha a_0 + b + c$

$a_2 = \alpha a_1 + 2b + c = \alpha(a_0\alpha + c + b) + 2b + c = a_0\alpha^2 + c(\alpha+1) + b(\alpha+2)$

$a_3 = \alpha a_2 + 3b + c = \alpha[a_0\alpha^2 + c(\alpha+1) + b(\alpha+2)] + 3b + c = a_0\alpha^3 + c(\alpha^2+\alpha+1) + b(\alpha^2+2\alpha+3)$

…

$a_n = \alpha a_{n-1} + nb + c$ a_0, c, b로 정리하여

$= a_0\alpha^n + c(\alpha^{n-1} + \cdots + \alpha + 1) + b(\alpha^{n-1} + 2\alpha^{n-2} + \cdots + (n-1)\alpha + n)$라 가정

$a_{n+1} = \alpha a_n + (n+1)b + c$이므로

$= \alpha[a_0\alpha^n + c(\alpha^{n-1} + \cdots + \alpha + 1) + b(\alpha^{n-1} + 2\alpha^{n-2} + \cdots + (n-1)\alpha + n)] + (n+1)b + c$

다시 a_0, c, b로 정리하면

$= a_0\alpha^{n+1} + c(\alpha^n + \cdots + \alpha + 1) + b(\alpha^n + 2\alpha^{n-1} + \cdots + (n-1)\alpha^2 + n\alpha + (n+1))$

올바른 재귀(induction)의 형태 이므로 증명 끝.

(정리 2-0‘‘) $\forall\, n \ge 1$에서 비동형 1차 점화식 $a_n = \alpha a_{n-1} + bn + c$와 초기조건이 a_0이면, $\forall\, n \ge 0$에서 일반해는 a_n은

$$\alpha \ne 1\text{이면 } a_n = a_0\alpha^n + b\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)\alpha^k + c\sum_{k=0}^{n}\alpha^k$$

$$= a_0\alpha^n + b\frac{\alpha^{n+1} - 2\alpha^{n+1} + (n+1)\alpha - n}{\alpha - 1} + c\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\text{이고}$$

$$\alpha = 1\text{이면 } a_n = b\frac{n(n+1)}{2} + cn + a_0\text{이다.}$$

(생각문제) $\forall\, n \ge 1$에서 비동형 1차 점화식 $a_n = \alpha a_{n-1} + an^2 + bn + c$와 초기조건이 a_0이면, $\forall\, n \ge 0$에서 일반해는 a_n은?

(생각문제) 비동형 항이 n차 다항식이면? 또는 비동형항이 일반함수 $f(n)$이면?

(정리 2-1) 점화식이 $a_n = ca_{n-1} + da_{n-2}$일 때, 2차 특정방정식 $x^2 - cx - d = 0$에서 서로 다른 두 실근 α, β를 가지면, $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$, 일반해는 $a_n = a\alpha^n + b\beta^n$이고, 상수 a, $b \in \boldsymbol{R}$은 초기조건 a_0와 a_1에서 구한다.

(증명) 초기조건 a_0와 a_1은 주어짐.

$a_n = ca_{n-1} + da_{n-2}$ 점화식에서(수학적 귀납법 증명)

$= c(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}) + d(a\alpha^{n-2} + b\beta^{n-2})$ 일반해가 $a_{n-1} = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$이라 가정

$= a\alpha^{n-2}(c\alpha + d) + b\beta^{n-2}(c\beta + d)$ 특정방정식에서 $c\alpha + d = \alpha^2$, $c\beta + d = \beta^2$이므로

$= a\alpha^{n-2}\alpha^2 + b\beta^{n-2}\beta^2 = a\alpha^n + b\beta^n = a_n$. 일반해가 $a_n = a\alpha^n + b\beta^n$임을 증명

(예 3) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$[3] 단 $a_0 = 2$, $a_1 = 7$. 교과서 p. 500

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$. $\therefore\ \alpha = 2$, $\beta = -1$.

$\therefore\ a_n = a2^n + b(-1)^n$.

초기조건 $a_0 = a + b = 2$

$a_1 = 2a - b = 7$

$\therefore\ a = 3$, $b = -1$

$\therefore\ a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$

(예 4) 피보나치(Fibonacci) 수열 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$과 $f_0 = 0$ and $f_1 = 1$.

$x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$f_n = a\alpha^n + b\beta^n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$f_0 = 0$: $a + b = 0$ $\therefore\ b = -a$

3) 2차 동형(homogeneous) 점화관계이다.

$f_1=1$: $a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$2a\sqrt{5} = 2 \qquad \therefore\ a = \frac{1}{\sqrt{(5)}},\ b = -\frac{1}{\sqrt{(5)}}$

$\therefore\ f_n = \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

(검증)

$f_0 = \frac{1}{\sqrt{(5)}} - \frac{1}{\sqrt{(5)}} = 0.$

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{(5)}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{(5)}}{2\sqrt{(5)}} = 1.$

$f_2 = \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{4\sqrt{(5)}}{2^2\sqrt{(5)}} = 1.$

$f_3 = \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{2\cdot 3\sqrt{(5)}+2\cdot 5\sqrt{(5)}}{2^3\sqrt{(5)}} = \frac{8}{4} = 2.$

$f_4 = \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \frac{4\cdot \sqrt{(5)}+4\cdot 5\sqrt{(5)}}{2^3\sqrt{(5)}} = \frac{24}{8} = 3.$

귀찮아서 (증명)

$f_n = \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 이면

$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

$= \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

$= \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right] - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

한편

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{(5)}+5}{2^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{(5)}+5}{2^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

(수학적 귀납법 증명 끝)