6 순열(Permutation)과 조합(Combination), 이항정리(Binomial Theorem)

(곱과 합의 법칙)

첫 번째 일(task)이 n_1개 있고, 두 번째 일이 n_2개 있을 때,

두 개의 일을 모두 하는 경우는 $n_1 \cdot n_2$가지이고,

두 개의 일 중 하나만 하는 경우는 n_1+n_2가지이다.

만일 두 개의 일중 같은 일이 $m(n_1, n_2 \leq m)$개 있다면 n_1+n_2-m가지이다.

(집합의 크기와의 관계)

$|A \times B| = |A| \times |B|$.

$|A \cup B| = |A|+|B|$, if $A \cap B = \varnothing$.

$|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$.

(집합의 크기의 확장)

$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$.

$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$, if $1 \leq i \neq j \leq n$: $A_i \cap A_j = \varnothing$.

(비들기집 원칙)

비들기 수가 비들기집보다 많으면, 두 마리 이상의 비들기가 좁게 들어가야 하는 집이 있다.

(Col. 2-1) 함수 f: $A \to B$에서 $|A|>|B|$이면 f는 1-1이 아니다.

(Col. 2-2) 함수 f: $A \to B$에서 f가 1-1이면 $|A| \leq |B|$이다.(Col.1의 대우 명제)

순열(Permutation)

(정리 3-1) $1 \leq r \leq n$일 때 $P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

(사실 1) $P(n,0) = 1$.

(Col. 1) $0 \leq r \leq n$일 때 $P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

(사실 2) $P(n,0) = n!$.

조합(Combination)

(정리 3-2) $0 \leq r \leq n$일 때 $C(n,r) = \dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

(증명) 서로 다른 r-permutation $(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_r)$은 $P(r,r)=r!$개 있다.

(Col. 2) $r \leq n$일 때 $C(n,r) = C(n,n-r)$.

(증명) $C(n,n-r) = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = C(n,r)$.

이항정리(二項; Binomial Theorem)

(예 1) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$ $\qquad$ $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$

$= x^2 + \binom{2}{1}xy + y^2$ $\qquad$ $= x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + y^3$

$= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2.$ $\qquad$ $= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3.$

(정리 4-1) 이항정리 $\quad$ x와 y는 변수이고, $n \geq 0$일 때

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{(n-1)}y + \cdots + \binom{n}{k}x^{(n-k)}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{(n-1)} + \binom{n}{n}y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(n-k)}y^k.$$

(Col. 1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. (Col. 2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. $\qquad$ (Col. 3) $\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n$.

(정리 4-2) 파스칼(Pascal)의 정리: $1 \leq k \leq n$일 때, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$이다.

(증명 1) $|T| = n+1$인 집합 T를 생각하자. $a \in T$일 때 $S = T - \{a\}$라면 $|S| = n$이다.

원소가 k개인 T의 부분집합($k < n+1$)의 수는 $\binom{n+1}{k}$이다.

원소가 k개이고 원소 a를 가지는 T의 부분집합은,

원소가 $k-1$개인 S의 부분집합과 $\{a\}$의 합집합 이므로 $\binom{n}{k-1}$개 이고,

원소가 k개이고 원소 a를 가지지 않는 $T-\{a\}$의 부분집합은 $\binom{n}{k}$개 이므로,

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$이다. (증명 1 끝)

(증명 2) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n! \cdot (k + n-k+1)}{(n-k+1)!\,k!}$

$= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \binom{n+1}{k}$[1]. (증명 2 끝)

1) 파스칼 삼각형의 증명 1과 증명 2는 각각 무슨 의미를 가지나?

중복 순열과 조합

(정리 5-1) $0 \leqq r \leqq n$일 때 $\Pi(n,r) = n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^r$.

(예) 함수 $f: A \to B$에서 $A = \{1, 2, \cdots, r\} = N_r$이고 $B = \{0, 1\}$이고 일 때,

$x = f$를 $\{(i, b_i) | 1 \leq i \leq r : b_i \in B\} \in f$ 대신에

$x = (b_1, b_2, \cdots, b_r) = b_1 b_2 \cdots b_r \in f = \{0, 1\}^r$라고 쓰고.

x를 r-bit 2진수라 부르고, 서로 다른 r-bit 2진수는 2^r개 있다.

(확장) $B = \{0, 1, \cdots, 9\}$이면 10진수

$B = \{a, b, \cdots, z\}$이면 영어(26진 문자),

$B = \{$ㄱ, ㄴ, $\cdots$, ㅎ, ㅏ, ㅑ, $\cdots$, ㅣ$\}$이면 한글(24진 문자)

(정리 5-2) $0 \leqq r \leqq n$일 때 $H(n,r) = C((n+r-1, n-1) = C((n+r-1, r)$.