2-1 집합과 연산

집합의 정의

집합(set)은 원소(element)들의 모임으로 정의한다.[1)]

$\{a,b,c\} = \{b,a,c\} = \{b,c,a\}$ $\{T,F\} \neq \{1,0\}$

$a \in A$ 원소 a는 집합 A에 속한다.[2)]

$a \notin A$ 원소 a는 집합 A에 속하지 않는다.[3)]

집합표시법

1. 원소나열법 집합의 원소들을 열거한다.

   예) $N_n = \{1,2,3,\cdots,n\}$ 유한 자연수집합(크기 n)

   $\aleph = \{1,2,3,\cdots\}$ 무한 자연수집합

2. 조건제시법으로 집합 P를 정의할 때 조건명제(predicate) $p(x)$를 이용하여,

   $P = \{x|\ p(x)\}$로 쓰기도 하나, (1)

   집합 P의 **전체집합**(universe) U를 특별히 드러내 표시하기도 한다.

   $P = \{x \in U|\ p(x)\}$ (2)

   전체집합 U를 표시하는 조건제시법 (2)는 두 가지 중요한 의미가 있다.

   (1) 집합 P를 포함하는 전체집합(universe of discourse) U를 특별히 밝힌다.[4)]

   $P \subseteq U$ (3)

   (2) **조건명제**(predicate) $p(x)$[5)]에서 변수 x를 전체제안자(universal quantifier) $\forall$로, $\forall x \in U$로 한정(bind)하기 때문에, $\forall x \in U$: $p(x)$는 **명제**[6)]가 된다.

부분집합과 두 집합의 같음

(정의) $A \subseteq B \equiv \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$ (4)

(정의) $A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$ (5)

$\equiv (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A).$

(예) $\{a,b,c\} = \{b,a,c\}$, $\{F,T\} \neq \{0,1\}$.

조건명제와 진리집합(truth set)

(정의) 조건명제 $p(x)$의 **진리집합** $P \overset{\text{def}}{=} \{x \in U|\ p(x)\}$로 정의한다.

곱집합(Carteciant Product))

(정의) 집합 A와 B의 **곱집합**(Cartesian product)을

$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b)|a \in A,\ b \in B\}$ (6)

로 정의한다. 이 때 **곱집합**의 원소 (a,b)를 **순서쌍**(ordered pair)이라 부른다.

---

1) An unordered collection of object
2) An **element** a is a **member** of the set A.
3) An element a is **not** a member of the set A.
4) 수학에서는 $x \in U$로 쓰고 U를 전체집합이라 부르나, 프로그래밍언어 Java나 C에서는 $U\ x$로 쓰고 U를 변수 x에 타입(type)이라 부른다.
5) 집합에서 사용되는 모든 조건명제(예; $p(x)$)에는 특별히 지정하지 않는 한, 전체제안자(universal quantifier) $\forall$가 전제되어 있는 것($\forall x \in U: p(x)$)으로 본다.
6) 명제는 참이나 거짓이 정해진 문장(statement)이다.

$\{a,b\} = \{b,a\}$이지만 $(a,b) \neq (b,a)$이다.

집합 $A \times B$의 크기는 집합 A와 B의 크기의 곱이다

$|A \times B| = |A| \times |B|$[7].

(확장) $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}$

n-순서쌍(tuple) $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

(사실) $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$.

(확장) $A^n \stackrel{\text{def}}{=} A \times A \times \cdots \times A$.

(사실) $|A^n| = |A|^n$.

멱집합(Power Set)

(정의) 집합 A의 부분집합의 집합을 집합 A의 멱집합(power sets)이라 부르고 2^A 또는 $\wp(A)$로 쓴다.

$2^A = \wp(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{B | B \subseteq A\}$.

(예) $2^{\{0,1,2\}} = \{ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\} \}$.

(사실) 집합 A의 멱집합 $2^A \cong \{0,1\}^A$이고 $|2^A| = 2^{|A|}$.

(예) $A = \{0,1,2\}$일 때, $2^A = \{ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\} \}$

$\leftrightarrow_f \{ 0_0 0_1 0_2, 0_0 0_1 1_2, 0_0 1_1 0_2, 1_0 0_1 0_2, 1_0 1_1 0_2, 1_0 0_1 1_2, 0_0 1_1 1_2, 1_0 1_1 1_2 \}$

$\varnothing \leftrightarrow_f 0_0 0_1 0_2$,

$\{0\} \leftrightarrow_f 1_0 0_1 0_2$, $\{1\} \leftrightarrow_f 0_0 1_1 0_2$, $\{2\} \leftrightarrow_f 0_0 0_1 1_2$,

$\{0,1\} \leftrightarrow_f 1_0 1_1 0_2$, $\{0,2\} \leftrightarrow_f 1_0 0_1 1_2$, $\{1,2\} \leftrightarrow_f 0_0 1_1 1_2$,

$\{1,2,3\} \leftrightarrow_f 1_0 1_1 1_2$.

(정리) $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$이고, $\{0,1\}^n = \{(b_1, b_2, \cdots, b_n) | \ 1 \le i \le n : b_i \in \{0,1\}\}$일 때 $2^{N_n} \leftrightarrow_f \{0,1\}^n$.

(증명) $\forall A \subseteq N_n (\in 2^{N_n})$: $f(A) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

단 $1 \le \forall i \le n$: 만일 $i \in A$이면 $b_i = 1$ | $i \not\in A$이면 $b_i = 0$.

$\forall b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \{0,1\}^n$: $f^{-1}(A) = \left\{ i \in N^n | 1 \le \forall i \le n : b_i = 1 \right\}$.

집합의 연산

전체집합 U에서 부분집합 A와 B에 대하여

$A \cup B = \{x \in U | \ a \in A \vee b \in B\}$ 합집합

$A \cap B = \{x \in U | \ a \in A, \ b \in B\}$[8] 교집합

$A - B = \{x \in U | \ a \in A, \ b \not\in B\}$ 차집합

$U - A = \{x \in U | \ a \not\in A\} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{A}$ 역집합

7) **합집합** $A \cup B$의 크기는 $|A \cup B| \le |A| + |B|$임에 유의하라.
8) $\{x \in U | \ a \in A \wedge b \in B\}$로 표시하는 것이 정확하나 보통은 $\{x \in U | \ a \in A, \ b \in B\}$로 쓴다.

집합 연산자 결합도의 우선순위(precedence of operator)

서로 다른 연산자가 괄호 없이 쓰였을 때, 결합하는 우선순서를 말하며 ($\overline{\ }$, $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, $=$)의 순서로 왼쪽에 연산자가 오른쪽 연산자보다 더 빨리 결합한다.

(예) $A \cup B \cap \overline{C} \subseteq D = (A \cup (B \cap (\overline{C}))) \subseteq D$

집합의 동등

$A \cup \varnothing = A \cup A = A \cup (A \cap B) = \overline{(\overline{A})} = A \cap U = A \cap A = A \cap (A \cup B) = A.$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. **결합법칙**

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. **분배법칙**

$\cup$와 $\cap$에 결합법칙(associative law)이 성립한다.

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$이라 쓸 수 있다.

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n{}^{9)} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i \in N_n}{}^{10)} A_i \text{ (단 } N_n = \{1, 2, \cdots, n\})$$

$(A \cap B) \cap C \equiv A \cap (B \cap C) \equiv A \cap B \cap C$이라 쓸 수 있다.

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i \in N_n} A_i \text{ (단 } N_n = \{1, 2, \cdots, n\})$$

De Morgan의 법칙

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

연산 $\cup$과 $\cap$이 모두 결합법칙을 만족시키므로 De Morgan의 법칙도 일반화 할 수 있다.

$n \geqq 1$일 때, $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$. $\overline{\bigcup_{i \in N_n} A_i} \equiv \bigcap_{i \in N_n} \overline{A_i}$

$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$. $\overline{\bigcap_{i \in N_n} A_i} \equiv \bigcup_{i \in N_n} \overline{A_i}$

9) 연산 $\cup$이 n개의 피연산자(operand)를 가지는 n진(n-ary)연산 이라한다.

10) Indexed set notation이라 하고, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$를 indexed set이라 부른다.