Homework #7

집합 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$와 관계 $R \subseteq X \times X$에 대해 $\forall i, j, l, k \in X, i \neq j \neq l \neq k$가 $iRj \land jRl \land lRk \Rightarrow iRl \lor iRk \lor jRk$를 만족할 때 다음을 보이시오. (단, $n \geq 4$, R은 $ir-reflexive$하고 $symmetric$하다.)

1. $\exists A, B \subset X \;\; s.t \;\; A \neq \emptyset \land B \neq \emptyset \land Par(X) = \{A, B\} \land (\exists m \in A, \exists n \in B, mRn \Rightarrow \forall a \in A, \forall b \in B, aRb)$ (10점)

2. $\exists i, j \in X, i \neq j \;\; s.t \;\; [i]_R = [j]_R$ (10점)

<u>Solution</u>

R이 ir-reflexive라고 symmetric하므로 연결로 생각 할 수 있다.

1.

<수학적 귀납법>

<u>Base case n=4 **(2점)**</u>

만약 연결된 쌍이 2개 이하라면 non-connected하기 때문에 서로 연결되지 않은 두개의 집합으로 쉽게 나눌 수 있다**(0.5점)**. 만약 연결된 쌍이 3개라면, 삼각형으로 연결되거나 한 원소에 나머지 3개의 원소가 연결된 경우 두가지가 있는데, 각각의 경우 조건을 만족하게 쉽게 나눌 수 있다**(0.5점)**. 만약 쌍이 4개 이상이라면, 3개 이상 연결된 원소가 존재하거나 cycle로 연결된 두가지가 있다. 각각의 경우 모두 조건을 만족하도록 나눌 수 있다**(1점)**.

(각각의 경우 어떤 식으로 나눠지는지 서술하지 않은 경우 다 합쳐서 1점)

<u>n인 경우 성립한다고 가정. n+1인 경우를 생각해보자.**(8점)**</u>

한 원소 x를 빼고 나머지는 귀납 가정에 의해 조건을 만족하는 두개의 집합으로 나눌 수 있다. 이 두 집합을 A,B라 할 때, A,B사이에 연결이 없는 경우를 생각하자. 모든 원소 쌍에 대하여 서로 연결되어 있으면, 연결을 지우고, 연결되어있지 않으면, 연결한 것을 생각하자. 이렇게 하더라도 문제의 조건이 그대로 성립한다. 따라서 A,B사이에 모두 연결이 있는 경우만 생각하자.**(1점)** 이제 어떤 a(A의 원소), b(B의 원소)에 대하여 aRx and (not xRb) 또는 (not aRx) and xRb가 성립함을 보이자. 만약 성립하지 않는다면, A와 x, B와 x는 모두 연결되어 있거나 연결되어 있지 않다. 어떤 경우든 A에 x를 포함시키면 된다. **(1점)** 이제 일반성을 잃지 않고 (not aRx) and xRb라고 하자. B에서 x와 연결된 원소의 집합을 B1, 연결되지 않은 원소의 집합을 B2라 하자. xRb이므로 B1은 공집합이 아니다. 임의의 b1, b2에 대해 xRb1 b1Ra aRb2 인데, (not xRa), (not xRb2)이므로, b1Rb2여야 한다. 따라서 B1과 B2는 모두 연결되어있다. 따라서 A+B2+{x}와 B1으로 나누면 조건이 성립한다.**(6점)**

2.

주어진 조건을 만족하는 집합의 부분 집합도 똑같이 조건을 만족한다.**(2점)**

1번에 의해서 두 집합 A,B로 나눌 수 있다. 그리고 각각의 집합 A,B가 조건을 만족하므로 A를 A1, A2, B를 B1, B2로 나눌 수 있다.**(2점)** 이렇게 계속 반복하게 되면 모든 집합의 원소의 개수가 1개가 되도록 만들 수 있다.**(1점)** 이때 마지막으로 나누어지는 집합을 C라고 하고 C1, C2로 나뉘어 졌다고 하고 각 원소를 c1, c2라고 하자. 나누어 지는 과정에서 c1과 c2는 C에 속해 있었기 때문에 다른 집합들과의 연결상태가 동일하다. 따라서 c1, c2는 서로 연결상태가 동일하고 주어진 조건을 만족한다.**(5점)**