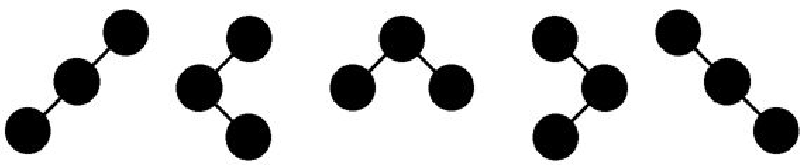
# Homework #6

Due date: 2016.05.11.Wed

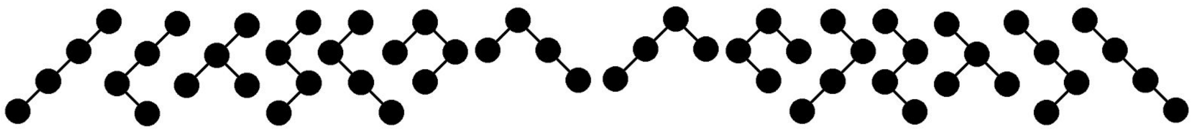
1. 5장 TP에서 extended binary tree의 집합 $EBT$ 를 다음과 같이 정의했다.
Basis) $\Phi \in EBT$ , $(\{r\}, \Phi, r) \in EBT$
Recursion)
If $T_1 = (V_1, E_1, r_1) \in EBT$ and $T_2 = (V_2, E_2, r_2) \in EBT$ where $V_1 \cap V_2 = \Phi$,
$T = T_1 \cdot T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup \{r\}, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\}, r) \in EBT$

extended binary tree 사이에 같다(=)라는 연산자를 다음과 같이 정의하자.
Basis) $\Phi = \Phi$, $(\{r_1\}, \Phi, r_1) = (\{r_2\}, \Phi, r_2)$ , $(\{r\}, \Phi, r) \neq \Phi$ , $\Phi \neq (\{r\}, \Phi, r)$
Recursion)
$T_1 = T_2$ if and only if $T_1' = T_2'$ and $T_1'' = T_2''$ ( $T_1 = T_1' \cdot T_1''$, $T_2 = T_2' \cdot T_2''$ )

$B_n$ 을 node의 개수가 n개인, 서로 다른 extended binary tree의 개수라고 정의하자.
예를 들면, $B_3 = 5$ 이다.



1.a $B_4$ 의 값을 구하시오. (2점)



14

1.b $B_n$ 의 점화식을 구하시오. (5점)
왼쪽 자식 tree의 node 수가 i개 일 때 오른쪽 자식 tree의 node 수는 n-1-i개이고, 이 때 서로 다른 tree의 개수는 $B_i B_{n-1-i}$ 임을 알 수 있다. 이들을 모두 합치면 $B_n$ 을 구할 수 있다.

$B_0 = 0$ , $B_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_i B_{n-1-i}$ (n>0)

1.c $B_{16}$ 의 값을 구하시오. (4점)

$B_0, B_1, \ldots, B_{16}$ = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670
35357670

2. 다음 점화식의 일반항을 구하시오.

2.a $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}\ (n > 1),\ a_0 = 4, a_1 = 8$ (2점)

$r^2 - 2r - 3 = 0$ , $\Rightarrow$ $r = -1, 3$
$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2(-1)^n$
$\alpha_1 + \alpha_2 = 4$ , $3\alpha_1 - \alpha_2 = 8$ , $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1$
$a_n = 3 \cdot 3^n + (-1)^n$

2.b $b_n = b_{n-1} + 8b_{n-2} - 12b_{n-3}(n > 2),\ b_0 = 3, b_1 = -1, b_2 = 9$ (3점)

$r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0$ , $\Rightarrow$ $r = 2, 2, -3$
$b_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)2^n + \alpha_3(-3)^n$
$\alpha_1 + \alpha_3 = 3$ , $2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = -1$ , $4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 9\alpha_3 = 9$ , $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 2$ , $\alpha_2 = -1$ , $\alpha_3 = 1$
$b_n = (2 - n)2^n + (-3)^n$

2.c $c_n = 2c_{n-1} + 8c_{n-2} + (0.28n + 1.6)5^n(n > 2), c_0 = 7, c_1 = 23$ (4점)

$c_n^{(h)} = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 4^n$
$F(n) = (0.28n + 1.6)5^n$ , $try\ c_n^{(p)} = (an + b)5^n$
$(an + b)5^n = 2(a(n-1) + b)5^{n-1} + 8(a(n-2) + b)5^{n-2} + (0.28n + 1.6)5^n$
$25an + 25b = 10a(n-1) + 10b + 8a(n-2) + 8b + 7n + 40$
$25an + 25b = 18an + 7n + 18b - 26a + 40$ , $\Rightarrow$ $a = 1, b = 2$
$c_n = c_n^{(h)} + c_n^{(p)} = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 4^n + (n + 2)5^n$
$\alpha_1 + \alpha_2 + 2 = 7$ , $-2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 15 = 23$ , $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 2$ , $\alpha_2 = 3$
$c_n = 2(-2)^n + 3 \cdot 4^n + (n + 2)5^n$