Homework #5

1. 모든 자연수 $n \in N_1$ 에 대해

$$a^2 + b^2 + c^2 = 21^n$$

를 만족하게 하는 서로 다른 세 자연수 $a, b, c \in N_1$ 가 반드시 존재함을 보이시오. (6점)

basis)
1) $n = 1$ 일 때
$a = 4,\ b = 2,\ c = 1$ 일 경우 성립
2) $n = 2$ 일 때
$a = 20,\ b = 5,\ c = 4$ 일 경우 성립
recursion)
$n > 2$ 일 때
$n - 2$ 에 대해 $a^2 + b^2 + c^2 = 21^n$ 를 만족하게 하는 세 자연수 $a, b, c \in N_1$ 가 있다고 하자.
양변에 21^2 를 곱하면 $(21a)^2 + (21b)^2 + (21c)^2 = 21^n$ 이고
$21a,\ 21b,\ 21c$ 는 당연히 자연수이므로 n 에 대해 세 자연수가 존재한다.

수학적 귀납법에 의해 증명

2. 다음과 같이 정의되는 함수 $A : N_0 \times N_0 \to N_0$ 가 있다.

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & (if\ m = 0) \\ A(m-1, 1) & (else\ if\ n = 0) \\ A(m-1, A(m, n-1)) & (else) \end{cases}$$

2.a $A(3,2)$ 의 값을 구하고 증명하시오. (2점)

0보다 큰 자연수 k 에 대해, $A(1,k) = A(0, A(1,k-1)) = A(1,k-1) + 1$
그리고 $A(1,0) = A(0,1) = 2$
따라서 $A(1,k) = k + 2\ [2 + (k+3) - 3]$
0보다 큰 자연수 k 에 대해, $A(2,k) = A(1, A(2,k-1)) = A(2,k-1) + 2$
그리고 $A(2,0) = A(1,1) = 3$
따라서 $A(2,k) = 2k + 3\ [2(k+3) - 3]$
$A(3,0) = A(2,1) = 5$
$A(3,1) = A(3,1) = A(2, A(3,0)) = 2A(3,0) + 3 = 13$
$A(3,2) = A(3,2) = A(2, A(3,1)) = 2A(3,1) + 3 = 29$

2.b $A(3,n)$ 의 값을 구하고 증명하시오. $(n \in N_0)$ (5점)

0보다 큰 자연수 k 에 대해, $A(3,k) = A(2, A(3,k-1)) = 2A(3,k-1) + 3$
그리고 $A(3,0) = A(2,1) = 5$
따라서 $A(2,k) = 2^{k+3} - 3$

3. tp에서 rooted tree, EBT와 FBT를 recursive하게 정의했다. (5장 v5 12~16p 참고)

3.a 모든 rooted tree의 node의 개수는 edge의 개수보다 1개 많음을 증명하시오. (2점)

basis) node 수가 1인 rooted tree
node 수는 1개이고 edge 수는 0개이므로 만족.
recursion) node 수가 k 이하인 모든 rooted tree의 node 수가 edge 수보다 1개 많다면
node 수가 k+1인 rooted tree에 대해
1) left, right중 하나가 φ 일 경우
node 개수 = k+1, edge 개수=k-1+1=k. 성립
2) left, right 둘 다 φ 가 아닐 경우
node 개수=left node 수+ right node 수 + 1
edge 개수=left edge 수-1+right node 수-1+2=left node 수+ right node 수
수학적 귀납법에 의해 증명

3.b $T=(V,E,r)$ 에서 만약 $(r_1,r_2)\in E$ 라면 r_2 는 r_1 의 자식이라고 하자.
모든 FBT의 모든 node의 자식 수는 0 또는 2임을 증명하시오. (2점)

basis) node 수가 1인 FBT
유일한 node의 자식 수는 0이므로 만족.
recursion) node 수가 k 이하인 모든 FBT의 모든 node의 자식 수가 0 또는 2라면
node 수가 k+1인 FBT에 대해
left, right 둘다 node 수가 k이하므로 node의 자식 수는 0 또는 2이고
root의 경우 left, right의 root를 자식으로 가지므로 자식 수는 2이다.
수학적 귀납법에 의해 증명

3.c 모든 FBT T 에 대해 $log(n(T)+1)\le h(T)+1$ 가 성립함을 증명하시오. (2점)

basis) node 수가 1인 FBT
$log(2)=1$ 이므로 성립
recursion) node 수가 k 이하인 모든 FBT가 항상 $log(n(T)+1)\le h(T)+1$ 를 만족한다면
node 수가 k+1인 FBT F 에 대해
left, right를 각각 L,R 이라 한다면
$log(n(L)+1)\le h(L)+1$ 이고 $log(n(R)+1)\le h(R)+1$ 이다.
양 변의 로그를 풀고 서로 더하면
$n(L)+1+n(R)+1\le 2^{h(L)+1}+2^{h(L)+1}$
$n(F)=n(L)+n(R)+1$ 이고 $h(R)=max(h(L),h(R))+1=h(R)+1$ 이므로
(편의상 $h(R)\ge h(L)$ 이라 하자)
$n(F)+1\le 2^{h(L)+1}+2^{h(R)+1}\le 2^{h(R)+1}+2^{h(R)+1}=2^{h(F)+1}$
양변에 log 를 취하면

$log(n(F)+1) \leq h(F)+1$
수학적 귀납법에 의해 증명

4. 교수님께서 4월 11일 수업시간에 언급하셨던 절대 오차, 상대 오차 문제입니다. (1점)
IEEE 754의 부동 소수점 오류를 확인하기 위해 다음과 같은 코드로 실험을 진행했다.
<IEEE_Test.java>

```
---------------------------------------------------------------------
public class IEEE_Test {
	public static void main(String args[]){
		float num = 0;
		for (int i = 0 ; i < 100000; i++){
			num+=0.0001;
		}
		System.out.println(num);
	}
}
---------------------------------------------------------------------
```

output : 10.00631
이 때, 절대 오차와 상대 오차를 구하시오.
※ 절대 오차와 상대 오차의 정의가 제각각인데, 구한 값의 절댓값을 적어주시면 됩니다.

절대 오차=$|$참값 − 측정값$| = |10 - 10.00631| = 0.00631$
상대오차=$[$절대 오차/참값$] = [0.00631/10] = 0.000631$